



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**PRISE EN COMPTE DE L'ATTITUDE FACE AU RISQUE
DANS LE CADRE DE LA DIRECTIVE MiFID**

André de PALMA
Nathalie PICARD
Jean-Luc PRIGENT

June 2009

Cahier n° 2009-35

DEPARTEMENT D'ECONOMIE

Route de Saclay
91128 PALAISEAU CEDEX
(33) 1 69333033

<http://www.enseignement.polytechnique.fr/economie/>
<mailto:chantal.poujouly@polytechnique.edu>

PRISE EN COMPTE DE L'ATTITUDE FACE AU RISQUE DANS LE CADRE DE LA DIRECTIVE MiFID

André de Palma,*Nathalie Picard[†]et Jean-Luc Prigent[‡]

June 16, 2009

Résumé

La directive européenne MiFID du 1^{er} novembre 2007, mise en application en France par l'AMF, a trouvé récemment (et en particulier depuis la crise financière) de nouveaux éléments de justification. Sa mise en place soulève néanmoins des questions méthodologiques (encore largement sous-estimées) relatives à l'analyse du comportement des investisseurs. Nous nous intéressons ici aux implications de cette directive et proposons un cadre d'analyse pour l'étude des préférences des investisseurs, et pour l'évaluation de leurs implications au niveau de la gestion de portefeuille. En particulier, nous analysons les conséquences d'une mauvaise adéquation portefeuille-client investisseur. Pour ce faire, nous étudions les implications des biais de perception et de prédiction des lois de probabilité des rendements financiers, à la fois dans le cadre de l'utilité espérée et dans celui de l'utilité non-espérée. Enfin, nous proposons une modélisation économétrique opérationnelle des choix des investisseurs basée sur la théorie des modèles de choix discrets.

Mots clé : Directive MiFID, tolérance au risque, utilité espérée et non-espérée, variation compensatoire.

Remerciements : Nous tenons à remercier Didier Davydoff pour ses éclairages sur la législation MiFID, ainsi que Moshe Ben-Akiva et Andrée Arth pour leurs discussions stimulantes. Nous restons seuls responsables des éventuelles erreurs qui pourraient figurer dans cet article.

1 Introduction

La directive MiFID ("Markets in Financial Instrument Directive"), aussi appelée directive MIF ("Marchés d'Instruments Financiers") a été mise en application

le 1^{er} novembre 2007. Cette directive a pour objectif de "renforcer la concurrence et la transparence sur les marchés financiers et vise à instaurer de meilleures règles de protection de l'investisseur". En pratique, les banques ont mis en place, à des degrés divers, des mesures afin d'aider les investisseurs. Cette directive protège surtout les investisseurs dits "retail", c'est-à-dire les personnes qui investissent moins de 500 000 € et qui ne sont que peu ou modérément actives sur les marchés financiers.

Par le biais de cette directive, l'Union Européenne établit un cadre législatif communautaire complet régissant l'exécution des transactions des investisseurs par les bourses et les intermédiaires financiers. Cette directive met en place un véritable "passeport unique" pour les intermédiaires financiers afin de leur permettre d'opérer dans l'ensemble de l'Union Européenne avec le moins de formalités possible tout en renforçant la protection de leurs clients contre certains opérateurs ou certaines pratiques peu scrupuleuses. En outre, la MiFID permet aussi aux intermédiaires financiers de traiter les ordres de clients en dehors des marchés réglementés. La directive MiFID vise deux grands objectifs réglementaires : (1) Protéger les investisseurs et préserver l'intégrité du marché, en fixant des exigences harmonisées pour l'activité des intermédiaires agréés; (2) Promouvoir l'équité, la transparence, l'efficacité et l'intégration des marchés financiers. Les mesures et recommandations préconisées se traduisent par le développement et le renforcement des services offerts aux investisseurs relatif :

1. *A l'évaluation du profil de prise de risque* des investisseurs. Ces profils de risque dépendent à la fois des caractéristiques des investisseurs, de leur situation patrimoniale, et de leurs objectifs de placements.
2. *Au devoir de communiquer aux clients des informations correctes et compréhensibles* sur les produits offerts et sur les transactions. De notre point de vue, l'information dépasse, et de loin, un aspect pédagogique, mis en évidence par l'association *Finance pour Tous*, par exemple. L'information

*Ecole Normale Supérieure de Cachan et Ecole Polytechnique.

[†]Université de Cergy-Pontoise, THEMA, INED et Ecole Polytechnique.

[‡]Université de Cergy-Pontoise, THEMA.

comporte aussi une composante stratégique, bien mise en évidence par des économistes (comme Joseph Stiglitz ou Jean-Jacques Laffont), qui semble avoir été omise de la directive. En effet, les institutions financières sont prises entre le l'objectif de vendre les actifs financiers les plus lucratifs, et celui d'offrir aux clients les produits qui leurs conviennent le mieux.

3. *A la vérification de l'adéquation des produits d'investissement au profil du client.* Ceci implique que les produits ne peuvent faire subir à l'investisseur plus de risque qu'il n'est prêt à encourir. Chaque conseiller en placement doit s'efforcer de répondre aux souhaits et attentes des investisseurs en leur permettant de concrétiser au mieux leurs objectifs financiers (pour autant qu'ils soient réalisables) tout en ne leur faisant pas supporter un risque déraisonnable. Nous pensons, en outre, qu'il y a lieu de discerner la capacité financière et la capacité psychologique à supporter le risque.

Différents critères permettent de déterminer en particulier les clients "retail". Ces critères sont basés sur les sources et la nature des revenus, la nature du patrimoine financier (liquidités, portefeuille, immobilier, etc.), les engagements financiers, la situation financière individuelle et familiale. Ces critères ne prennent pas en compte la mesure de l'aversion au risque, qui n'est que partiellement déterminée par les caractéristiques individuelles citées ci-dessus. Voir aussi de Palma et Picard (2009) pour une discussion plus approfondie de la directive MiFID.

L'outil que nous avons développé, *RiskToleranceOnLine*,¹ qui permet la collecte d'informations au niveau individuel, propose une mesure de l'aversion au risque (et des autres dimensions de l'attitude face au risque). Ces informations enrichissent des bases de données, collectées depuis plus de 5 ans auprès de plusieurs milliers de répondants, qui peuvent être mises en correspondance avec les indices macro-économiques.

Les recommandations de placement sont basées sur une mesure quantitative de l'aversion au risque correspondant à une représentation des préférences, formalisée au moyen d'une fonction d'utilité, dans un cadre d'analyse d'utilité espérée (EU) ou non-espérée (non-EU). Notre analyse est basée d'une part sur des indicateurs de l'aversion au risque, mis en évidence dans nos études précédentes et d'autre part sur des questions

séquentielles qui impliquent des "trade-offs" entre options certaines et options risquées.

Notre approche constitue à notre connaissance la seule méthode quantitative d'élicitation des préférences et de mesure quantitative des déterminants de l'attitude face au risque, qui peut être utilisée à grande échelle et de manière autonome. Cette approche, basée sur une théorie économétrique de mesure des préférences est intimement liée aux modèles classiques de la théorie de la décision. L'approche économétrique repose sur la théorie des modèles de choix discrets (voir McFadden, 2001 pour un aperçu des modèles économétriques concernés et Anderson, de Palma et Thisse, 1992 pour la théorie des modèles de choix discrets).

Notre approche se démarque des autres approches, très utilisées par les intermédiaires financiers, qui relèvent du scoring. Les approches standards proposent une méthode figée de mesure des préférences basée sur une série de questions "pertinentes" et de réponses auxquelles sont associés des poids fixes déterminés par des experts. Le score total est la somme des scores obtenus à chacune des questions.

La méthode de scoring soulève les interrogations et critiques suivantes dans le cadre de la directive MiFID.

1. Les poids sont déterminés de manière subjective par des experts. Ceci peut poser des difficultés en cas de conflit entre le prestataire de services financiers et son client, étant donné que les évaluations subjectives des parties adverses (investisseurs et intermédiaires financiers) pourraient ne pas coïncider.
2. Les mesures proposées par le scoring sont ordinales et non cardinales. Dans le meilleur des cas, elles peuvent aider à prédire si un client est prêt à supporter plus de risque qu'un autre, mais pas de quantifier le niveau de risque optimal pour chaque client. Il en résulte que les outputs de ces modèles risquent de ne pas être utilisables tels quels dans des modèles classiques de gestion de portefeuille.
3. Lorsque les conditions du marché changent, il en résulte que l'outil devrait être recalé entièrement. De plus, il n'existe pas à ce jour de méthode permettant d'utiliser pour le marché B (par exemple le marché domestique) les évaluations des poids effectuées pour le marché A (par exemple, un marché étranger). Des méthodes et des études de transférabilité ont été développées dans le cadre des modèles économétriques de choix discrets, proposés ici.

¹La version académique du site peut être consultée sur www.RiskToleranceOnLine.com. Une version commerciale, *RiskMeasure*, est en cours de développement par la société RiskTolerance.

Les modèles EU restent théoriques et n'ont qu'un intérêt pratique limité s'il n'existe pas de méthodes économétriques pour les valider. En fait, les travaux de Tversky et Kahneman (1992) ainsi que ceux de différents chercheurs en finance comportementale ont montré qu'un certain nombre de comportements de choix face au risque ne satisfont pas, d'un point de vue expérimental, les axiomes de base sous-tendant la théorie EU. En particulier les axiomes d'indépendance et de transitivité, à la base de la théorie de l'utilité espérée ne sont pas vérifiés d'un point de vue expérimental. Une tentation a été de modifier les théories d'utilité espérée, afin de rendre compte de ces violations des axiomes classiques sous-tendant la théorie EU.²

Notre étude expérimentale a suggéré deux types de déviations par rapport à la théorie de l'utilité espérée. La première a trait à des transformations des probabilités. Dans ce cas, la probabilité perçue est une fonction non-linéaire des probabilités objectives. En effet, les théories de l'utilité non-espérée supposent que les individus surestiment les petites probabilités (proches de zéro) et sous-estiment les grandes probabilités (proches de un) : les probabilités perçues forment une courbe d'allure logistique en fonction des vraies probabilités. Second type de déviation par rapport au modèle canonique de l'utilité espérée, les fonctions de transformations pour les gains et pour les pertes sont différentes, les pertes étant évaluées plus sévèrement que les gains. Ce comportement, dit d'aversion aux pertes, est abondamment décrit dans la littérature, mais ses implications demandent à être étudiées de manière plus systématique, dans le cadre des comportements de choix de portefeuilles. Nos estimations économétriques ont permis de retrouver ces effets mis en évidence dans la littérature, mais de manière plus subtile.

Nous présentons dans la section 2 les éléments essentiels de la théorie de la décision tels que les concepts d'utilité espérée et non-espérée et de dominance stochastique. Dans la section 3, nous examinons les conséquences d'une inadéquation des portefeuilles proposés par un prestataire de services d'investissement (PSI) que nous quantifions au moyen de la notion de variation compensatoire. Nous y abordons notamment le cas de la gestion standard et examinons également

²Le lecteur intéressé par la théorie de la décision en incertain peut consulter entre autres Fishburn (1970) qui introduit les résultats de base de la théorie de l'utilité et de la prise de décision en incertain. Fishburn (1988 a,b) donne également un aperçu historique de la théorie de l'utilité espérée tout en examinant les remises en cause de l'axiome d'indépendance. Les livres de Gollier (2001) et de Eeckhoudt *et al.* (2005) exposent de manière détaillée les résultats de la théorie EU ainsi que ses applications à la gestion statique du portefeuille financier. Grandin (2005) ainsi que Broihanne, Merli et Roger (2004) présentent les éléments de la finance comportementale et certaines de ses conséquences pouvant potentiellement expliquer certaines anomalies constatées sur les marchés financiers.

certains aspects ayant trait à la gestion structurée. La quatrième partie présente brièvement la méthodologie de collecte de données, les modèles économétriques nécessaires pour l'examen empirique des attitudes individuelles face au risque et résume les observations principales déjà effectuées au moyen du site web RiskToleranceOnLine. Enfin, la cinquième section conclut sur les implications opérationnelles des résultats obtenus.

2 Éléments de la théorie de la décision

2.1 Motivations

Un grand nombre de comportement d'investisseurs (effectifs ou étudiés en laboratoire) décrits dans la littérature sont expliqués comme des déviations à la théorie classique EU. Les théories non-EU proposent ainsi des explications pour répondre aux interrogations suivantes : Pourquoi les investisseurs effectuent-ils trop de transactions (par rapport à une stratégie optimale compte tenu des coûts de transaction) ? Pourquoi les portefeuilles surpondèrent-ils les actions domestiques au détriment des actions étrangères ? Pourquoi les portefeuilles contiennent-ils (en Europe en particulier) relativement peu d'actions étant donnée l'aversion au risque moyenne des investisseurs ? Pourquoi les décisions des investisseurs deviennent-elles moins avisées dès lors qu'ils commencent à passer eux-mêmes leurs ordres en ligne ? Enfin, pourquoi les investisseurs tendent-ils à surestimer les petites probabilités et à sous-estimer les grandes probabilités ?

Il ne s'agit pas ici de reprendre les explications fournies dans la littérature, étant donnée l'abondance d'articles traitant de ces paradoxes. Il s'agit de comprendre et d'élucider le rapport entre les comportements compatibles avec la théorie de l'EU (ou du non-EU) et les comportements observés. Il est possible de filtrer les préférences d'un investisseur, en promouvant par exemple des portefeuilles contenant une plus grande part d'actions, en l'aidant à mieux diversifier son portefeuille ou encore en l'amenant à mieux percevoir les petites ou les grandes probabilités. Dans ce sens, la théorie de l'utilité non-espérée devient davantage une théorie descriptive tandis que la théorie de l'utilité espérée se cantonne dans un rôle normatif. Dans cette logique, la théorie de l'utilité EU décrit comment les investisseurs devraient se comporter, tandis que la théorie de l'utilité non-EU nous renseigne sur les comportements effectifs des investisseurs (sans porter de jugement de valeur).

Les implications de ces déviations à la théorie EU restent à être étudiées en ce qui concerne le conseil en placement. En effet, il reste à déterminer si celles-ci doivent être intégrées dans les conseils fournis aux investisseurs ou si elles ne sont utiles que dans le cadre d'un modèle descriptif (et pas dans le cadre d'un modèle normatif). Cette question importante fera l'objet de discussions ultérieures (voir les remarques préliminaires dans de Palma *et al.*, 2009).

La théorie de l'utilité espérée remet en question l'homogénéité des préférences : elle rend compte du fait que des individus différents font des choix différents face aux mêmes options, étant donné que leur aversion au risque diffère. La théorie de l'utilité non-espérée ne remet pas en question cette dernière loi. Elle introduit d'autres paramètres d'hétérogénéité (tels que l'aversion aux pertes ou l'aversion à l'ambiguïté, par exemple). Dans cet article, nous proposons une autre manière de généraliser le modèle canonique EU (ou son extension dit modèle non-EU). Cette extension part de la constatation suivante : si on pose la même question à un individu, ou une série de questions logiquement reliées (par exemple, via une relation de transitivité) au même individu, on observe généralement une dispersion des réponses autour d'une réponse moyenne : typiquement, le même individu confronté à des conditions identiques va répondre différemment aux mêmes questions au cours d'occasions différentes. La théorie classique, EU ou non-EU, n'est pas en mesure de rendre compte de cette constatation simple. On peut argumenter que les individus apprennent, ou bien qu'une certaine fatigue s'installe. On peut encore argumenter qu'il y a des effets de contexte. Mais un autre type de réponse est envisageable.

Cette autre voie consiste à considérer ces écarts de comportements comme des erreurs, présentes dans toute collecte de données. Cette prise en compte explicite des erreurs, d'emblée au niveau théorique, nous semble importante, comme nous en développons l'argument dans cet article. Pour rendre compte de ces déviations aux comportements de la théorie économique, nous proposons d'introduire une seconde source d'hétérogénéité dans la population. Cette extension s'applique aussi bien au modèle EU qu'au modèle non-EU.

2.2 Préférences en incertain

2.2.1 La notion de loterie

Face à des situations d'incertitude, il s'avère nécessaire de recenser si possible toutes les implications résultant

de la règle de décision adoptée; puis, toujours si possible, de leur affecter des probabilités mesurant leurs degrés d'occurrence.

Considérons par exemple le cas d'un ensemble Ω fini d'alternatives :

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}.$$

Soit $p = \{p_1, \dots, p_m\}$ les probabilités des éléments ω_i de Ω qui vérifient donc :

$$\forall i, 0 \leq p_i \leq 1 \text{ et } \sum_i p_i = 1.$$

Définition 1 Une loterie L est déterminée à partir de la donnée d'un vecteur du type :

$$\{(\omega_1, p_1), \dots, (\omega_m, p_m)\}.$$

Notons \mathcal{L} l'ensemble de toutes les loteries définies sur un même ensemble Ω . Une loterie composée L_c est une loterie dont les éléments sont eux aussi des loteries.

Considérons l'exemple d'une loterie composée de deux alternatives possibles : la loterie L^a et la loterie L^b auxquelles sont associés respectivement les poids α et $1 - \alpha$. En conséquence, la loterie composée L_c est telle que la probabilité de réalisation de ω_i vaut :

$$p_i = \alpha p_i^a + (1 - \alpha) p_i^b.$$

La loterie composée L_c possède donc le même système de probabilités que la combinaison convexe suivante :

$$\alpha L^a + (1 - \alpha) L^b.$$

2.2.2 Axiomes sur les préférences

Le décideur est considéré comme rationnel si sa relation de préférence (notée \succeq) sur l'ensemble des loteries \mathcal{L} , est une relation binaire satisfaisant les axiomes suivants :

Axiome 1 : (complétude, réflexivité et transitivité)

- La relation \succeq est *complète* (toutes les loteries sont comparables par la relation \succeq) :

$$\forall L^a \in \mathcal{L}, \forall L^b \in \mathcal{L}, L^a \succeq L^b \text{ ou } L^b \succeq L^a.$$

La relation d'*indifférence* \sim associée à la relation \succeq est définie par :

$$\forall L^a \in \mathcal{L}, \forall L^b \in \mathcal{L}, L^a \sim L^b \iff L^a \succeq L^b \text{ et } L^b \succeq L^a.$$

- La relation \succeq est *réflexive* :

$$\forall L \in \mathcal{L}, L \succeq L.$$

- La relation \succeq est *transitive* :

$$\begin{aligned} &\forall L^a \in \mathcal{L}, \forall L^b \in \mathcal{L}, \forall L^c \in \mathcal{L}, \\ &L^a \succeq L^b \text{ et } L^b \succeq L^c \implies L^a \succeq L^c. \end{aligned}$$

Une autre propriété communément admise est celle de la *continuité* : les petites variations de probabilités n'affectent pas le classement des loteries. Ceci se traduit par l'axiome suivant :

Axiome 2 : (continuité)

La relation de préférence \succeq sur l'ensemble \mathcal{L} des loteries vérifie : $\forall L^a \in \mathcal{L}, \forall L^b \in \mathcal{L}, \forall L^c \in \mathcal{L}$, si $L^a \succeq L^b \succeq L^c$ alors il existe un nombre réel $\alpha \in [0, 1]$ tel que :

$$L^b \sim \alpha L^a + (1 - \alpha)L^c.$$

L'axiome de continuité implique l'existence d'une fonctionnelle $\mathcal{U} : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall L^a \in \mathcal{L}, \forall L^b \in \mathcal{L}, L^a \succeq L^b \iff \mathcal{U}(L^a) \geq \mathcal{U}(L^b).$$

Les axiomes précédents constituent le fondement de la théorie économique du consommateur. En vue de construire une théorie du choix en situation d'incertitude, d'autres axiomes ont été introduits pour mieux spécifier ce que doit être un comportement rationnel. Un concept a en particulier émergé : l'axiome d'*indépendance*. Celui-ci constitue la base du critère de l'utilité espérée. Il est considéré comme le grand standard et ce, en dépit d'inconvénients mis au jour dans les théories alternatives développées ultérieurement.

Axiome 3 : (indépendance)

La relation de préférence \succeq sur l'ensemble \mathcal{L} des loteries est telle que : $\forall L^a \in \mathcal{L}, \forall L^b \in \mathcal{L}, \forall L^c \in \mathcal{L}$ et pour tout $\alpha \in [0, 1]$,

$$L^a \succeq L^b \iff \alpha L^a + (1 - \alpha)L^c \succeq \alpha L^b + (1 - \alpha)L^c.$$

Cet axiome signifie que si deux loteries L^a et L^b sont mélangées de façon identique avec une troisième loterie L^c alors la relation de préférence entre les deux loteries initiales n'est pas modifiée.

2.3 Théorie de l'utilité espérée ("Expected Utility", EU)

La théorie de l'utilité espérée, dite théorie EU (Expected Utility), implique que l'appréciation de

l'alternative risquée est mesurée par l'intermédiaire d'une relation linéaire vis-à-vis des probabilités d'occurrence. La théorie de l'utilité espérée a pour objectif de formaliser les problèmes de décision en incertain au moyen d'une représentation fonctionnelle des préférences. Celle-ci sert à mesurer "le degré de satisfaction" résultant du choix fait par l'individu. L'objectif d'un individu rationnel au sens de ce critère est donc de maximiser cette fonctionnelle. Cette représentation est usuellement basée sur une relation de préférence définie sur des loteries possibles, concept qui fut d'ailleurs assez tardivement introduit.

L'axiome d'indépendance a été introduit implicitement par von Neumann et Morgenstern (1944). Il permet une caractérisation du critère de l'utilité espérée. En effet, cet axiome implique la linéarité de la fonctionnelle d'utilité \mathcal{U} définie sur les loteries, vis-à-vis des probabilités d'occurrence des événements.

Theoreme 2 *Supposons que la relation de préférence \succeq définie sur l'ensemble \mathcal{L} des loteries vérifie les axiomes de continuité et d'indépendance. Alors, la relation \succeq peut être représentée par une fonctionnelle linéaire par rapport aux probabilités d'occurrence des événements : c'est-à-dire qu'il existe une fonction d'utilité u définie (à une transformation affine croissante près) sur l'ensemble des éventualités Ω et à valeurs dans \mathbb{R} telle que pour toutes les loteries $L^a = \{(\omega_1, p_1^a), \dots, (\omega_m, p_m^a)\}$ et $L^b = \{(\omega_1, p_1^b), \dots, (\omega_m, p_m^b)\}$, l'équivalence suivante est vérifiée :*

$$L^a \succeq L^b \iff \sum_{i=1}^m u(\omega_i) p_i^a \geq \sum_{i=1}^m u(\omega_i) p_i^b. \quad (1)$$

2.3.1 Aversion au risque

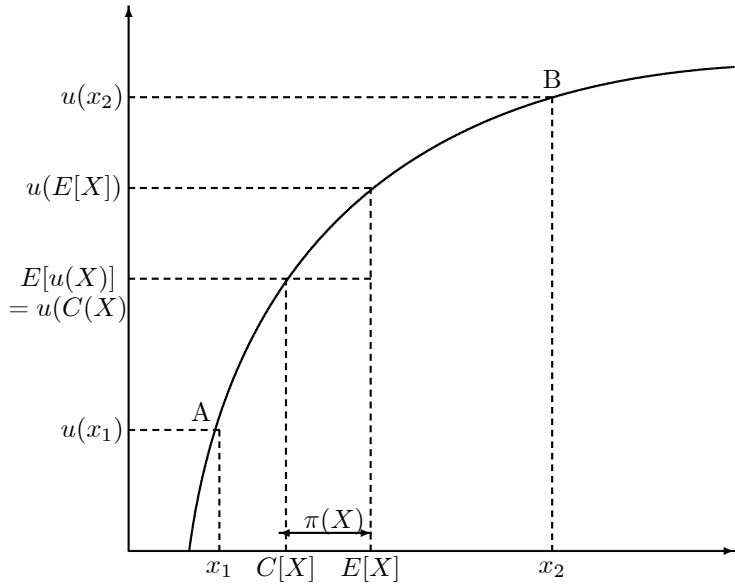
Le comportement des individus que l'on peut observer vis-à-vis des marchés financiers ou d'assurance montre qu'en général les investisseurs ont de l'aversion au risque. Investir sur un actif risqué signifie que celui-ci offre des possibilités de rentabilité assez nettement supérieures au rendement sans risque. Pour illustrer cette notion d'aversion au risque, Friedman et Savage (1948) introduisent par exemple le modèle suivant : soit X une variable aléatoire ne prenant que deux valeurs possibles x_1 et x_2 . Soit p la probabilité d'avoir x_1 et $(1 - p)$ celle d'avoir x_2 . Soit u une fonction d'utilité définie sur les résultats possibles. Considérons alors les deux loteries suivantes L^a et L^b : la loterie L^a offre le montant $\mathbb{E}[X]$ avec une probabilité égale à 1. La loterie L^b paie x_1 avec une probabilité égale à p et x_2 avec une probabilité égale à $(1 - p)$. Ces deux loteries ont la même espérance de rendement.

Cependant, l'investisseur qui a de l'aversion vis-à-vis du risque choisit L^a plutôt que L^b . En conclusion, nous obtenons :

$$\mathcal{U}[L^a] = u(\mathbb{E}[X]) \text{ et } \mathcal{U}[L^b] = \mathbb{E}[u(X)]. \quad (2)$$

Par conséquent, comme illustré par le graphique 1, la concavité de u implique que l'utilité procurée par le rendement espéré $u(\mathbb{E}[X])$ est plus grande que celle de la loterie L^b de valeur $\mathbb{E}[u(X)]$.

Figure 1: Aversion au risque, équivalent certain et concavité



En effet, la concavité entraîne l'inégalité suivante, dite de Jensen : $\forall \lambda \in [0, 1], \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$,

$$\lambda u(a) + (1 - \lambda)u(b) \leq u(\lambda a + (1 - \lambda)b).$$

L'aversion au risque repose également sur la notion d'équivalent certain. Considérons la loterie "sûre", notée $C[X]$, qui permet d'atteindre le même niveau d'utilité que la loterie L^b . L'investisseur est donc indifférent entre le fait de recevoir le montant $C[X]$ en toute certitude ou celui d'investir sur la loterie L^b dont le rendement espéré vaut $\mathbb{E}[X]$.

L'inégalité $C[X] < \mathbb{E}[X]$ traduit l'aversion au risque. L'écart $\pi[X] = \mathbb{E}[X] - C[X]$ considéré par Pratt (1964) est appelé la prime de risque. Celle-ci représente le montant que l'investisseur accepte de perdre pour pouvoir profiter d'un revenu sans risque.

Définition 3 (Aversion, neutralité et propension au risque)

1) Un investisseur a de l'aversion au risque si $C[X] \leq \mathbb{E}[X]$ ou de façon équivalente si $\pi[X] \geq 0$, pour toute variable aléatoire X .

2) Un investisseur est neutre au risque si $C[X] = \mathbb{E}[X]$ ou de façon équivalente si $\pi[X] = 0$, pour toute variable aléatoire X .

3) Un investisseur a du goût pour le risque si $C[X] \geq \mathbb{E}[X]$ ou de façon équivalente si $\pi[X] \leq 0$, pour toute variable aléatoire X .

Dans le contexte de l'utilité espérée, l'aversion au risque est entièrement caractérisée par des hypothèses qui portent sur la fonction d'utilité u .

Theoreme 4 Soit u une fonction d'utilité représentant les préférences sur l'ensemble des éventualités (u est supposée croissante).

1) La fonction u est concave si et seulement si l'investisseur a de l'aversion au risque.

2) La fonction u est affine si et seulement si l'investisseur est neutre au risque.

3) La fonction u est convexe si et seulement si l'investisseur a du goût pour le risque.

2.3.2 Mesures d'aversion au risque d'Arrow-Pratt

Un problème épineux est celui de la mesure du degré d'aversion au risque d'un individu. Une des réponses possibles à cette question est d'étudier la prime de risque π et de la mettre en relation avec la concavité (voir Pratt, 1964; Arrow, 1965).

Définition 5 Soient u et v deux fonctions d'utilité représentant les préférences sur les valeurs possibles de la richesse. La préférence associée à u est dite "avoir plus d'aversion au risque" que celle associée à v si les primes de risque vérifient : $\pi_u(X) \geq \pi_v(X)$, pour toute variable aléatoire X .

Theoreme 6 Si u et v sont supposées continues, croissantes et deux fois différentiables, les propriétés suivantes permettent de définir la notion d'avoir "plus d'aversion au risque" :

1) Les dérivées des deux fonctions d'utilité sont telles que :

$$-\frac{u''}{u'}(x) > -\frac{v''}{v'}(x),$$

pour tout x dans \mathbb{R} .

2) Il existe une fonction concave Φ telle que : $u(x) = \Phi[v(x)]$, pour tout x dans \mathbb{R} .

3) Les primes de risque vérifient : $\pi_u(X) \geq \pi_v(X)$, pour toute variable aléatoire X .

Considérons la variance $\sigma_X^2 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$. En utilisant l'approximation de Taylor au point $\mathbb{E}[X]$, nous obtenons :

$$\mathbb{E}[u(X)] \simeq u(\mathbb{E}[X]) + (1/2)u''(\mathbb{E}[X])\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]. \quad (3)$$

D'autre part,

$$u(\mathbb{E}[X]) - \pi[X] \simeq u(\mathbb{E}[X]) - u'(\mathbb{E}[X])\pi[X]. \quad (4)$$

Or, par définition, $u(\mathbb{E}[X]) - \pi[X] = \mathbb{E}[u(X)]$. En conséquence, nous en déduisons l'approximation suivante :

$$\pi[X] \simeq -[u''(\mathbb{E}[X])/u'(\mathbb{E}[X])]\sigma_X^2. \quad (5)$$

Le rapport $-u''(\mathbb{E}[X])/u'(\mathbb{E}[X])$ peut donc être considéré comme une mesure d'aversion au risque. Il est positif puisque la fonction d'utilité u est croissante et concave.

Définition 7 Le terme $A(x) = -u''(x)/u'(x)$ est appelé *aversion absolue au risque d'Arrow-Pratt* ("absolute risk aversion" ARA). L'*aversion relative au risque d'Arrow-Pratt* ("relative risk aversion" RRA), définie par $R(x) = -xu''(x)/u'(x)$, permet de mieux prendre en compte le niveau de richesse.

2.3.3 Fonctions d'utilité standards

La spécification des fonctions d'utilité reste un problème redoutable. Postuler une fonction d'utilité est restrictif même si on estime les paramètres de cette fonction d'utilité étant donné que différentes fonctions d'utilité possèdent différentes implications (au niveau des stratégies d'investissement et d'épargne : voir Gollier, 2001, Gollier, Eeckhoudt et Schlessinger, 2005 et de Palma et Prigent, 2007). La spécification de la fonction d'utilité fait partie de la description des préférences. Dans cette ligne de réflexion, de Palma, Picard et Prigent (2007) ont proposé une méthode originale, basée sur des transformations des gains qui laissent les choix invariants lorsque les préférences sont décrites par certaines familles de fonction d'utilité. Cette méthode permet de comparer d'un point de vue économétrique le pouvoir explicatif de différentes fonctions d'utilité et par conséquent permet de départager les fonctions d'utilité.

Les définitions précédentes d'aversion au risque permettent de caractériser les fonctions d'utilité standards, en particulier la classe des fonctions d'utilité HARA.

Définition 8 Une fonction d'utilité u est dite du type HARA ("hyperbolic absolute risk aversion") si l'inverse de son aversion absolue au risque est une fonction affine de la richesse.

Proposition 9 Les fonctions d'utilité HARA u revêtent la forme suivante :

$$u(x) = a \left(b + \frac{x}{c} \right)^{1-c}, \quad (6)$$

où u est définie sur le domaine $b + \frac{x}{c} > 0$. Les paramètres a , b et c sont des constantes telles que : $a(1-c)/c > 0$.

Leur ARA $A(x)$ est donnée par :

$$A(x) = \left(b + \frac{x}{c} \right)^{-1}, \quad (7)$$

dont l'inverse est bien une fonction affine en x . Notons que la condition : $a(1-c)/c > 0$ permet de déduire $u' > 0$ et $u'' < 0$.

Trois sous-classes sont habituellement distinguées :

1. "Constant absolute risk aversion" (CARA). Quand le paramètre c tend vers l'infini, nous obtenons alors $A(x) = A$ constante. Dans ce cas, la fonction d'utilité u est de la forme : $u(x) = -\frac{\exp[-Ax]}{A}$. Notons que la RRA est croissante en la richesse.
2. "Constant relative risk aversion" (CRRA). Lorsque $b = 0$, alors $R(x) = c$ est constante et u est donc du type :

$$u(x) = \begin{cases} x^{1-c}/(1-c) & \text{if } c \neq 1, \\ \ln[x] & \text{if } c = 1. \end{cases} \quad (8)$$

Ce type de fonction d'utilité possède une aversion absolue au risque décroissante ("decreasing absolute risk aversion" DARA).

3. *Fonction d'utilité quadratique*. Si $c = -1$, la fonction d'utilité u est quadratique. Afin que u soit croissante, son domaine est restreint à l'intervalle $] -\infty, b[$. Son ARA est croissante en la richesse ("increasing absolute risk aversion" IARA). Ceci implique que la prime de risque $\pi(\cdot)$ est croissante, propriété relativement contre-intuitive et qui montre les limites d'application de cette fonction (en dépit de sa simplicité de calcul dans la détermination par exemple des portefeuilles optimaux).

2.3.4 Applications à l'allocation de portefeuille

Le cas standard de gestion de portefeuille présuppose que l'investisseur a une fonction d'utilité u croissante et concave. Ce dernier dispose de deux actifs financiers sur lesquels il peut investir : l'un, noté par M , (par exemple, un actif monétaire) et l'autre risqué S (par exemple, une action ou un indice financier). Soient r_M et r_S leurs rendements respectifs. Notons λ la proportion de la richesse initiale V_0 investie sur l'actif risqué. La valeur du portefeuille en $t = 1$ est alors donnée par la solution de l'équation suivante :

$$(1-\lambda)(1+r_M)+\lambda(1+r_S) = (1+r_M)+\lambda(r_S-r_M). \quad (9)$$

Si on suppose que $\mathbb{E}[r_S] > r_M$, l'espérance de rendement du portefeuille est alors une fonction croissante de λ . L'investisseur doit calculer la valeur de λ qui maximise son espérance d'utilité, c'est à dire résoudre le problème suivant :

$$\max_{\lambda} \mathcal{U}(\lambda) = \mathbb{E}[u\{(1+r_M)V_0 + \lambda(r_S-r_M)V_0\}]. \quad (10)$$

Si on suppose que la fonction d'utilité u est deux fois différentiable, la valeur optimale λ^* est calculée à partir des conditions du premier ordre :

$$\mathcal{U}'(\lambda^*) = 0, \quad (11)$$

avec

$$\mathcal{U}'(\lambda^*) = V_0 \mathbb{E}[(r_S-r_M)u'(\{(1+r_M)V_0 + \lambda(r_S-r_M)V_0\})]$$

La concavité de u entraîne :

$$\mathcal{U}''(\lambda^*) = (V_0)^2 \mathbb{E}[(r_S-r_M)^2 u''(V_0 + \lambda V_0(r_S-r_M))] \leq 0.$$

En conséquence \mathcal{U}' est décroissante. Or nous avons aussi :

$$\mathcal{U}'(0) = V_0(1+r_M)u'(V_0)\mathbb{E}[(r_S-r_M)]. \quad (12)$$

Donc la condition $\mathbb{E}[r_S] > r_M$ implique que la proportion λ^* investie sur l'actif risqué est bien positive.

L'hypothèse d'Arrow (1965) est que les préférences des individus devraient être DARA et IRRA ("*increasing relative risk aversion*") :

$$\frac{dA(x)}{dx} \leq 0 \text{ et } \frac{dR(x)}{dx} \geq 0 \quad (13)$$

Les arguments en faveur d'une telle opinion sont les suivants :

- L'hypothèse DARA est justifiée en raison du fait que pour un risque donné, les investisseurs "riches" n'ont pas d'aversion au risque plus grande que les "pauvres";

- L'hypothèse IRRA traduit le fait que, quand la richesse et le risque augmentent simultanément, la propension à endosser le risque devrait être réduite. Dans l'exemple précédent, la proportion investie sur l'actif risqué est croissante en la richesse mais augmente moins vite que dans la relation de proportionnalité.

2.4 Dominance stochastique

En situation d'incertitude se posent naturellement très vite des problèmes du type : Comment classer deux projets X et Y aux conséquences aléatoires ? Pour un investisseur donné dont la fonction d'utilité u est bien identifiée, le projet X est préféré au projet Y si l'espérance d'utilité $\mathbb{E}[u(X)]$ est plus grande que $\mathbb{E}[u(Y)]$. Cependant, comment opérer ce classement si l'utilité u n'est pas connue ou observable ?

C'est précisément l'objet de la théorie de la dominance stochastique. Celle-ci fait intervenir les distributions de probabilité des variables aléatoires X et Y . Les différentes notions de dominance stochastique reposent de fait sur des critères de type $\mathbb{E}[u(X)] \geq \mathbb{E}[u(Y)]$, pour toute fonction d'utilité u appartenant à un certain ensemble donné.

Supposons par exemple que le support des variables aléatoires considérées est contenu dans l'intervalle $[a, b]$. Notons respectivement F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et de Y .

Définition 10 X est dite "*dominer stochastiquement au premier ordre*" Y (" $X \succeq_1 Y$ ") si $F_X(w) \leq F_Y(w)$, pour tout $w \in [a, b]$.

Cette définition est bien compatible avec le concept d'utilité espérée puisque nous avons la caractérisation suivante :

Proposition 11 $X \succeq_1 Y$ si et seulement si

$$\mathbb{E}[u(X)] = \int_a^b u(w)dF_X(w) \geq \mathbb{E}[u(Y)] = \int_a^b u(w)dF_Y(w), \quad (14)$$

pour toute fonction d'utilité u qui est croissante.

Définition 12 X est dite "*dominer stochastiquement au second ordre*" Y (" $X \succeq_2 Y$ ") si $\int_a^w F_X(s)ds \leq \int_a^w F_Y(s)ds$, pour tout $w \in [a, b]$ ou, de manière équivalente, si $S(w) = \int_a^w [F_Y - F_X](s)ds$ est toujours positive.

Remarque 13 Comme mentionné dans Hadar et Russel (1969) ou dans Rothschild et Stiglitz (1970), cette propriété est équivalente au fait que tous les investisseurs ayant une fonction d'utilité du type *min-utilité* préfèrent X à Y : pour tout w_0 dans $[a, b]$, nous avons

$$\mathbb{E}[\text{Min}(X, w_0)] \geq \mathbb{E}[\text{Min}(Y, w_0)]. \quad (15)$$

Remarquons que $X \succeq_2 Y$ implique $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$. De plus, la dominance stochastique au second ordre entraîne celle au premier ordre, mais la réciproque est fautive.

La caractérisation de la dominance stochastique au second ordre s'obtient grâce au critère du type $\mathbb{E}[u(X)] \geq \mathbb{E}[u(Y)]$ pour toute fonction d'utilité u dans un certain ensemble donné.

Proposition 14 $X \succeq_2 Y$ si et seulement si $\mathbb{E}[u(X)] \geq \mathbb{E}[u(Y)]$, pour toute fonction d'utilité u croissante et concave.

La notion de dominance stochastique au second ordre est équivalente à plusieurs autres définitions introduites dans Rothschild et Stiglitz (1970, 1971) :

Proposition 15 Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1) Si X et Y ont la même espérance, l'utilité espérée de X est plus grande que l'utilité espérée de Y pour toute fonction d'utilité u croissante et concave :

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] \text{ et } \mathbb{E}[u(X)] \geq \mathbb{E}[u(Y)] \quad (16)$$

2) Préservation de l'espérance et augmentation de la dispersion : la surface délimitée par les fonctions de répartition

$$S(w) = \int_a^w [F_Y - F_X](s) ds \quad (17)$$

vérifie : $S(b) = 0$ (i.e. $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$) et $S(w)$ est toujours positive (i.e. $X \succeq_2 Y$).

3) Ajout d'un bruit : il existe une variable aléatoire ϵ telle que $Y = X + \epsilon$ et $\mathbb{E}[\epsilon|X] = 0$.

2.5 Théorie de l'utilité dépendante du rang

La théorie de l'utilité dépendante du rang ("Rank Dependent Expected Utility", RDEU) suppose que

les individus prennent en compte les distributions de probabilité cumulées plutôt que les probabilités elles-mêmes. Dans ce contexte, nous pouvons introduire des représentations des préférences qui sont compatibles avec la dominance stochastique à l'ordre 1.

La représentation fonctionnelle des préférences est alors définie de la manière suivante :

Définition 16 Pour toutes les variables aléatoires X et Y qui modélisent les résultats (ou conséquences) de choix à valeurs dans l'intervalle $[-M, M]$, nous avons l'équivalence suivante :

$$X \succ Y \Leftrightarrow V(X) \geq V(Y), \quad (18)$$

$$\text{avec} \quad (19)$$

$$V(Z) = \int_{-M}^M u(z) d\Phi(F_Z(z)), \quad (20)$$

où la fonction $u(\cdot)$ est continue et différentiable, strictement croissante et unique à une transformation linéaire croissante près. La fonction $\Phi(\cdot)$, qui mesure la déformation des probabilités, est continue et strictement croissante de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. La fonction $F_Z(\cdot)$ représente la fonction de distribution cumulée de Z . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\Phi(0) = 0$ et $\Phi(1) = 1$, de sorte que $\Phi(\cdot)$ est unique.

Soit la loterie discrète $L = \{(x_1, p_1), \dots, (x_m, p_m)\}$ avec

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n.$$

La fonction d'utilité V est donnée par :

$$V(L) = \sum_{i=1}^n u(x_i) \left[\Phi\left(\sum_{j=1}^i p_j\right) - \Phi\left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j\right) \right], \quad (21)$$

avec la convention $\sum_{j=1}^0 p_j = 0$. Puisque les poids $\Phi(\sum_{j=1}^i p_j)$ dépendent du rang des résultats x_i , cette relation de préférence est appelée "utilité dépendante du rang" ("rank dependent expected utility"). Ces poids sont déterminés en classant d'abord les résultats par ordre croissant puis en sommant les utilités pondérées par la suite des nouveaux poids $(\Phi(\sum_{j=1}^i p_j) - \Phi(\sum_{j=1}^{i-1} p_j))_i$. Ainsi, on suppose bien qu'il existe une probabilité "objective" (statistique) mais les individus transforment cette probabilité donnée en utilisant une transformation de sa fonction de distribution cumulée. Ceci est compatible avec la dominance stochastique à l'ordre 1.

Remarque 17 Le critère RDEU est une généralisation du critère EU. En effet, pour $\Phi(p) = p, \forall p \in [0, 1]$,

la représentation fonctionnelle des préférences est donnée par ³

$$\begin{aligned} V(L) &= \sum_{i=1}^n u(x_i) \left[\left(\sum_{j=1}^i p_j \right) - \left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n p_i u(x_i) = EU(L). \end{aligned}$$

Plusieurs modèles ont été proposés dans le contexte RDEU, en particulier la théorie de l'utilité anticipée et celle des perspectives cumulées.

2.5.1 Théorie de l'utilité anticipée ("Anticipated Utility", AU)

Quiggin (1982) conserve les trois axiomes essentiels de la théorie de l'utilité espérée : la transitivité, la dominance stochastique à l'ordre 1 et la continuité. Il ajoute cependant l'axiome d'indépendance faible.

Définition 18 (Axiome d'indépendance faible)
Considérons deux loteries

$$\begin{aligned} L_X &= \{(x_1, p_1), \dots, (x_n, p_n)\} \\ &\text{et} \\ L_Y &= \{(y_1, p_1), \dots, (y_n, p_n)\}, \end{aligned}$$

telles que

$$\begin{aligned} x_1 &\leq \dots \leq x_n \text{ et } y_1 \leq \dots \leq y_n, \\ &\text{et} \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \mathbb{P}[X=x_i] &= \mathbb{P}[Y=y_i]. \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe une valeur commune $x_{i_0} = y_{i_0}$. Considérons deux loteries $L_{X'}$ et $L_{Y'}$ qui sont respectivement égales à L_X et L_Y , mis à part le fait que x_{i_0}

³Si Φ n'est pas l'identité mais si $u(x) = x$, alors le critère RDEU correspond à la théorie duale de Yaari (1987). Comme souligné dans Tallon (1997), le critère RDEU comporte plusieurs avantages : Contrairement au critère EU, le critère RDEU permet de séparer le comportement vis-à-vis du risque de celui vis-à-vis de la richesse. C'est pourquoi, l'approche RDEU est compatible avec les observations empiriques usuelles qui montrent que les individus sur ou sous-estiment les probabilités d'occurrences des événements (*i.e.*, sont soit *pessimistes* soit *optimistes*). A noter également que, contrairement au critère EU, RDEU permet de définir deux notions d'aversion au risque: la forme faible standard considérée par Arrow-Pratt et la forme forte introduite par Rothschild et Stiglitz (1970, 1971). Tallon (1997) montre également que l'aversion forte au risque fournit une interprétation du critère RDEU : les croyances d'un individu sont caractérisées par un ensemble de probabilités donné et sa fonction d'utilité est l'infimum des espérances de son utilité sur cet ensemble. Notons que ce type de résultat est également obtenu dans le cadre de la caractérisation des mesures de risque monétaires.

et y_{i_0} sont remplacées par une autre valeur commune. La préférence \succeq est faiblement indépendante si et seulement si

$$L_X \succeq L_Y \iff L_{X'} \succeq L_{Y'}. \quad (22)$$

Remarque 19 Considérons une loterie $L = \{(x_1, p_1), \dots, (x_n, p_n)\}$. Alors une fonctionnelle V qui satisfait les conditions de Quiggin est du type :

$$V(L) = \sum_{i=1}^n u(x_i) \left[\Phi \left(\sum_{j=1}^i p_j \right) - \Phi \left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j \right) \right], \quad (23)$$

où Φ est strictement croissante de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, est concave sur $[0, \frac{1}{2}]$, ($\Phi(p_i) > p_i$) et convexe sur $[\frac{1}{2}, 1]$, ($\Phi(p_i) < p_i$) avec $\Phi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ et $\Phi(1) = 1$.

Comme proposé par Quiggin (1982), la fonction Φ peut être choisie comme suit :

$$\Phi(p) = \frac{p^\delta}{(p^\delta + (1-p)^\delta)^{\frac{1}{\delta}}}, \quad (24)$$

avec par exemple, $\delta = 0,6$. Sous les hypothèse précédentes, la dominance stochastique à l'ordre 1 est satisfaite. De plus, le paradoxe d'Allais est résolu et le modèle est en accord avec les résultats empiriques de Tversky et Kahneman (1992), à savoir que les individus sur-pondèrent les événements de petite probabilité alors qu'ils ont tendance à sous-pondérer ceux de grande probabilité. Beaucoup d'expériences empiriques ont montré de plus que les individus n'ont pas la même attitude vis-à-vis des gains et des pertes. L'utilité sur les pertes semble être convexe alors que l'utilité sur les gains apparaît concave. La valeur de chaque composante est déterminée en prenant leurs utilités espérées par rapport à une probabilité modifiée "à la Quiggin". Ce type de comportement est modélisé par la théorie des perspectives cumulées.

2.5.2 Théorie des perspectives cumulées ("Cumulative Prospect Theory", CPT)

Tversky et Kahneman (1992) ont introduit à la fois des fonctions d'utilité différentes pour les pertes et les gains et également une transformation des fonctions de distribution cumulées. Formellement, il existe deux fonctions w^- et w^+ définies sur $[0, 1]$, et une fonction d'utilité v telle que l'utilité V portant sur la loterie $L = \{(x_1, p_1), \dots, (x_n, p_n)\}$ avec $x_1 < \dots < x_m < 0 < x_{m+1} < \dots < x_n$ soit définie comme suit : (Φ^- et Φ^+ sont respectivement définies par : $\Phi_1^- = w^-(p_1)$ et

$$\Phi_n^+ = w^+(p_n),$$

$$\begin{aligned}\Phi_i^- &= w^-\left(\sum_{j=1}^i p_j\right) - w^-\left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j\right), \\ \forall i \in \{2, \dots, m\}, \\ \Phi_i^+ &= w^+\left(\sum_{j=i}^n p_j\right) - w^+\left(\sum_{j=i+1}^n p_j\right), \\ \forall i \in \{m+1, \dots, n-1\}.\end{aligned}\tag{25}$$

Alors, V est donnée par : $V(L) = V^-(L) + V^+(L)$ avec

$$V^-(L) = \sum_{i=1}^m v(x_i) \Phi_i^- \text{ et } V^+(L) = \sum_{i=m+1}^n v(x_i) \Phi_i^+.\tag{26}$$

Quand la distribution de probabilité F a une densité f dont le support est l'intervalle $[-M, M]$, et que les fonctions w^- et w^+ possèdent des dérivées $w^{-'}$ et $w^{+'}$, alors nous avons ⁴

$$V(L) = \int_{-M}^0 v(x) w^{-'}[F(x)] f(x) dx + \int_0^M v(x) w^{+'}[1 - F(x)] f(x) dx.\tag{27}$$

Comme mentionné dans Quiggin (1982), les fonctions w^- et w^+ peuvent être choisies de la manière suivante : $w(p) = \frac{p^\delta}{(p^\delta + (1-p)^\delta)^{\frac{1}{\delta}}}$, avec, par exemple, $\delta^- = 0,69$ et $\delta^+ = 0,61$.

Nous considérons des lois de probabilité associées aux loteries admettant des densités de probabilité. Dans ce qui suit, nous supposons qu'il existe une fonctionnelle Φ qui modifie la probabilité historique, prenant en compte le comportement de l'investisseur. Si nous supposons que les actifs de base du marché ont des rendements ayant des densités de probabilité, il existe une autre fonctionnelle φ , définie sur l'ensemble des densités de probabilité, associée à la fonctionnelle Φ . La fonction φ remplit les conditions suivantes :

Hypothèse 1 : pour toute densité f , $\varphi(f)$ est positive.

Hypothèse 2 : pour toute densité f , on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(f)(x) dx = 1.$$

Hypothèse 3 : pour toute distribution de probabilité \mathbb{P} de densité f , la loi $\Phi[\mathbb{P}]$ a une densité $\varphi(f)$ égale à $f\psi(F)$, où F désigne la fonction de distribution cumulée associée à f .

Remarque 20 Ces hypothèses sont satisfaites par exemple pour le critère de l'utilité espérée ainsi que pour

⁴Voir de Palma, Picard et Prigent (2007).

le critère de l'utilité anticipée et la théorie des perspectives cumulées.

Pour le premier cas, nous considérons $\varphi(f) = f$ (i.e. $\psi(F) \equiv 1$).

Pour le second cas, la modification de la probabilité correspond à la procédure suivante : il existe un seuil x^* et deux fonctions w^- et w^+ définies sur $[0, 1]$ de dérivées $w^{-'}$ et $w^{+'}$ tels que l'individu maximise :

$$\int_a^{v^*} U(v) w^{-'}[F(v)] f(v) dv + \int_{v^*}^b U(v) w^{+'}[1 - F(v)] f(v) dv.\tag{28}$$

Comme suggéré par Quiggin (1982), les fonctions w^- et w^+ peuvent être choisies de la manière suivante :

$$w(p) = \frac{p^\gamma}{(p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}},$$

avec par exemple $\gamma^- = 0,69$ et $\gamma^+ = 0,61$.

La fonctionnelle $\varphi(f)$ est alors définie par $\varphi(f)(v) = f(v)\psi(F)(v)$ avec

$$\psi(F)(v) = \frac{w^{-'}[F(v)]1_{v \leq v^*} + w^{+'}[1 - F(v)]1_{v > v^*}}{w^{-'}[F(v^*)] + w^{+'}[1 - F(v^*)]}.\tag{29}$$

3 Le positionnement des portefeuilles financiers

Comment mesurer le degré d'inadéquation entre une offre de produits financiers "standardisés" proposés par un prestataire de services financiers et le portefeuille "optimal" que souhaiterait théoriquement un client en fonction de ses capacités et de ses objectifs d'investissement ainsi que de sa propension à prendre des risques ?

Nous examinons dans ce qui suit deux exemples fondamentaux du problème de positionnement de portefeuilles standardisés, par exemple des OPCVM :

- Le premier exemple correspond à une gestion classique sur des produits financiers de base : monétaire, obligations, actions, qui constituent les composants essentiels de la grande majorité des OPCVM. Nous examinons en particulier les conséquences d'une mauvaise adéquation d'un produit financier à la tolérance au risque d'un client, en terme de perte d'utilité ou de variation compensatoire. L'étude est menée dans le cadre classique de la maximisation de l'utilité espérée.

- Le second exemple illustre certains effets bien connus en finance comportementale lorsque le critère de l'utilité espérée n'est plus validé. Nous choisissons de montrer entre autres les conséquences d'une "distorsion" des probabilités objectives (ou "statistiques"), comme suggéré par Quiggin (1982) et Tversky et Kahneman (1992). Nous montrons comment cette déformation peut modifier profondément le profil d'un fonds structuré.

Dans le souci d'alléger l'exposé, nous considérons un marché financier "simplifié"⁵ contenant un actif sans risque B de taux instantané r (placement monétaire) et un actif risqué S (un indice financier, par exemple). Leurs dynamiques sont respectivement données par :

$$dB_t = rB_t dt, \quad (30)$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r + \theta_S)dt + \sigma dW_t, \quad (31)$$

où W est un mouvement brownien standard. Le paramètre σ est une constante strictement positive modélisant la volatilité. Le paramètre θ_S est une constante qui représente la prime de risque de l'actif S .

Pour ce marché complet, il existe une unique probabilité neutre au risque Q associée à la prime de risque du marché ν . Sa densité de Radon-Nicodyn $\eta = dQ/dP$ est donnée par :

$$\eta_t = \exp[-\nu W_t - \frac{1}{2}\nu^2 t] \text{ avec } \nu = \frac{\theta_S}{\sigma}.$$

3.1 Le cas standard

Nous considérons ici des investisseurs qui maximisent leurs utilités espérées. Nous examinons le problème du positionnement optimal des portefeuilles vis-à-vis de deux paramètres fondamentaux : l'aversion au risque et l'horizon d'investissement.

3.1.1 Portefeuilles optimaux

Nous rappelons les résultats standards au sujet de l'optimisation dynamique de portefeuille dans un tel modèle. Les processus de pondérations de portefeuille sont notés x_B et x_S . La valeur du portefeuille à chaque instant t est notée V_t . En raison de l'égalité $x_B + x_S = 1$

vérifiée à chaque instant, la dynamique de la valeur du portefeuille V est donnée par :

$$\frac{dV_t}{V_t} = [r + x_S(t)\theta_S]dt + x_S(t)\sigma dW_t.$$

Les préférences de l'investisseur sont décrites au moyen d'une fonction d'utilité U qui prend notamment en compte son aversion au risque. Le capital initial investi est noté V_0 . Nous supposons que l'investisseur maximise l'utilité espérée de la valeur de son portefeuille sur un horizon de temps T . En conséquence, les pondérations optimales de son portefeuille sont solutions du problème suivant :

$$\text{Max}_{x_S(\cdot)} E_P [U(V_T)].$$

Ce problème peut être résolu explicitement pour les grands classes de fonction d'utilité usuelles,⁶ ce qui permet d'analyser le rôle de l'aversion au risque dans la détermination du portefeuille optimal.

Nous illustrons notre propos dans le cadre des fonctions d'utilité CRRA. Considérons dans un premier temps le cas de l'utilité logarithmique (les autres portefeuilles optimaux étant des fonctions du portefeuille optimal en présence d'utilité logarithmique). La fonction d'utilité logarithmique est définie par $U(x) = \text{Log}(x)$, $x > 0$, de sorte que l'aversion absolue au risque vérifie $-U''(x)/U'(x) = 1/x$ et l'aversion relative au risque est constante : $-xU''(x)/U'(x) = 1$. Dans ce cas, le portefeuille optimal est appelé "le portefeuille numéraire" (voir Long, 1990) ou le portefeuille de croissance optimale (voir Merton, 1971, 1992). A maturité T , sa valeur V_T^{log} est donnée par :

$$V_T^{\text{log}} = V_0 H_T,$$

où le portefeuille numéraire H_T est déterminé par la relation :

$$H_T = \exp(rT) / \eta_T. \quad (32)$$

Notons que pour tout m , H_T^m possède une distribution lognormale dont l'espérance $E[H_T^m]$ est définie par :

$$E[H_T^m] = \exp \left[\left(m r + \frac{\nu^2 m(m+1)}{2} \right) T \right], \quad (33)$$

Considérons une fonction d'utilité CRRA.⁷ Cette

⁶Voir par exemple Cox et Huang (1989) qui utilisent une technique de résolution basée sur les propriétés de martingalité des prix actualisés. Dans le cadre de taux d'intérêt stochastiques, le lecteur intéressé pourra consulter Sorensen (1999), Brennan et Xia (2000), Bajeux-Besnainou, Jordan et Portait (2003), ainsi que Lioui et Poncet (2001, 2005) pour un exposé général.

⁷Voir Gollier (2001) par exemple pour les définitions et les propriétés des fonctions d'utilité.

⁵Nous renvoyons le lecteur intéressé à de Palma et Prigent (2008, 2009) pour un exposé plus complet, dans le cadre d'un taux stochastique et d'un marché financier tel qu'introduit dans Bajeux, Portait et Jordan (2001, 2003) et dans Lioui et Poncet (2005).

fonction peut s'écrire de la manière suivante : $U_\gamma(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, avec $\gamma > 0$.

Le portefeuille optimal de maturité T , $V_{(\gamma,T)}^{CRRRA}$, est donnée par :

$$V_{(\gamma,T)}^{CRRRA} = \left(\frac{V_0}{E[H_T^{(\frac{1-\gamma}{\gamma})}]} \right) H_T^{(\frac{1}{\gamma})},$$

ce qui implique qu'il suit une loi log-normale.

3.1.2 Utilité du portefeuille optimal

Soit un investisseur ayant une fonction d'utilité CRRA avec une aversion relative au risque γ . Soit T son horizon d'investissement. Dans ce cas, la fonction d'utilité indirecte (espérance d'utilité de son portefeuille optimal) est donnée par :

$$\mathbb{E}[U_\gamma(V_{(\gamma,T)}^*; V_0)] = \left(\frac{V_0^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right) \exp \left[\gamma \left(m r + \frac{\nu^2 m(m+1)}{2} \right) T \right],$$

avec $m = (1 - \gamma) / \gamma$. Notons :

$$\Gamma(m) = \left(m r + \frac{\nu^2 m(m+1)}{2} \right).$$

3.1.3 Le choix de l'investisseur parmi les portefeuilles standardisés

Nous déterminons ci-après la valeur de l'utilité espérée d'un investisseur qui choisit l'un des titres financiers proposés par un prestataire de services d'investissement.

Considérons un investisseur de type (γ, T) qui sélectionne un portefeuille P_i . Notons (γ_i, T) les caractéristiques qui correspondent au cas où P_i est le portefeuille optimal.

La valeur espérée de l'utilité CRRA de l'investisseur de type (γ, T) lorsqu'il sélectionne la portefeuille P_i est donnée par :

$$\mathbb{E}[U_\gamma(V_{(\gamma_i,T)}^*; V_0)] = \left(\frac{V_0^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right) \exp \{ [\gamma - 1] \Gamma(m_i) + \Gamma(\tilde{m}_i) \} T,$$

avec $m_i = (1 - \gamma_i) / \gamma_i$ et $\tilde{m}_i = (1 - \gamma) / \gamma_i$.

Supposons à titre d'exemple que cet investisseur soit dans l'obligation d'opérer son choix parmi trois portefeuilles standardisés proposés par l'institution financière : le premier, noté P_C , est de type "conservateur"

(20% en actions); le deuxième, noté P_M , est de type "modéré" (50% en actions); le troisième enfin P_A est plutôt "agressif" (70% en actions).

Considérons les valeurs suivantes pour les paramètres du marché financier : taux court $r = 4\%$, prime de risque $\theta_S = 8\%$, volatilité $\sigma = 20\%$.⁸ Le Tableau (1) suivant donne les aversions au risque correspondantes.

Tableau 1 : Pondérations pour la fonction CRRA

x_S^*	x_B^*	x_S^*/x_B^*	γ
70%	30%	2.33	$\gamma_A = 2.86$
50%	50%	1	$\gamma_M = 4$
20%	80%	0.25	$\gamma_C = 10$

L'aversion au risque de l'investisseur diffère en général de ces trois valeurs "idéales" ($\gamma \neq \gamma_i$, $i = A, M, C$). Pour une aversion au risque supérieure à 10, l'investisseur choisira le portefeuille P_C tandis qu'avec une aversion inférieure à 2.86, il sélectionnera le portefeuille P_M . En conséquence, il existe un investisseur indifférent qui remplit la condition d'indifférence suivante :

$$\mathbb{E}[U_\gamma(V_{(\gamma_M,T)}^*; V_0)] = \mathbb{E}[U_\gamma(V_{(\gamma_C,T)}^*; V_0)].$$

La solution de cette équation est unique, comprise entre 4 et 10, et elle est notée γ_{MC} .

De manière semblable, l'investisseur indifférent entre P_M et P_A a un type $\gamma_{MA} \in (2.86; 4)$, qui est l'unique solution de l'équation :

$$\mathbb{E}[U_\gamma(V_{(\gamma_A,T)}^*; V_0)] = \mathbb{E}[U_\gamma(V_{(\gamma_M,T)}^*; V_0)].$$

Dans le cas CRRA, nous obtenons $\gamma_{AM} = 3.33$ et $\gamma_{MC} = 5.72$. Les investisseurs tels que $\gamma < 3.33$ choisissent P_A , ceux tels que $\gamma > 5.72$ sélectionnent P_C ; les autres P_M .

Pour représenter cette inadéquation entre les portefeuilles proposés et le portefeuille idéal du client, nous pouvons introduire plusieurs mesures qualitatives ou quantitatives. Cependant, l'une d'entre elles permet de mieux visualiser d'emblée le degré de concordance entre l'offre du prestataire de services d'investissement et la demande de l'investisseur particulier. Il s'agit de la variation compensatoire ("compensating variation").

⁸Rappelons que la pondération optimale x_S^* correspondant à la fonction d'utilité CRRA $u(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ est donnée par :

$$x_S^* = \frac{1}{\gamma} \frac{\theta_S}{\sigma^2}.$$

3.1.4 Indice quantitatif de la “satisfaction” de l’investisseur

La perte d’utilité induite par le fait de ne pas disposer d’un portefeuille optimal correspondant à sa propre aversion au risque peut être mesurée au moyen de cette variation compensatoire. Considérons un investisseur d’aversion au risque γ disposant du capital initial V_0 . S’il dispose de son propre portefeuille optimal, son utilité espérée vaut $E[U_\gamma(V_{(\gamma_i, T_i)}^*); V_0]$. S’il sélectionne un portefeuille correspondant à l’aversion au risque γ_i , il ne retrouvera le même niveau d’utilité que précédemment qu’à la condition d’investir un capital $\tilde{V}_0 \geq V_0$. Par conséquent, cet investisseur demande (de manière théorique) une compensation basée sur le différentiel entre \tilde{V}_0 et V_0 , montants qui vérifient :

$$E[U_\gamma(V_{(\gamma, T)}^*); V_0] = E[U_\gamma(V_{(\gamma_i, T)}^*); \tilde{V}_0]. \quad (34)$$

Le montant \tilde{V}_0 est à mettre en relation avec le concept d’équivalent certain et peut être interprété comme un montant initial implicite nécessaire au maintien du niveau de l’utilité espérée.⁹

L’équation précédente peut être résolue explicitement. Elle conduit à la relation :

$$CV(\gamma, \gamma_i) = \frac{\tilde{V}_0}{V_0} = \exp \left[\frac{\nu^2 T}{2} \left(\frac{(\gamma - \gamma_i)^2}{\gamma \gamma_i^2} \right) \right]. \quad (35)$$

Illustrons les résultats précédents pour un investisseur dont la fonction d’utilité est CRRA. Dans les trois figures suivantes, les compensations sont indiquées pour trois portefeuilles (conservateur, modéré et agressif), optimisés sur un horizon de 25 années. A titre d’exemple, un investisseur avec une aversion au risque $\gamma = 7$ qui sélectionne le meilleur portefeuille possible (ici, le conservateur) supporte une perte relativement faible (compensation de 2.60% de son investissement initial). Cependant, si on lui conseillait par erreur le portefeuille modéré, cette compensation théorique serait de 17.5% et, pire encore, si le portefeuille agressif était retenu, cette compensation serait de l’ordre de 82%!¹⁰ Cet exemple montre bien l’importance de l’évaluation relativement précise de l’aversion au risque

⁹La variation compensatoire peut être interprétée comme un équivalent certain monétaire c défini par :

$$U(c) = E[U(V_T)].$$

Notons \tilde{c} l’équivalent certain correspondant au portefeuille standardisé. Pour une fonction d’utilité CRRA, le rapport des variations compensatoires est égal à l’inverse de celui des équivalents certains :

$$\frac{\tilde{V}_0}{V_0} = \frac{c}{\tilde{c}}.$$

¹⁰Elle correspondrait à un coût de gestion supplémentaire de l’ordre de 2.42% par an.

et de la recommandation d’un investissement approprié.

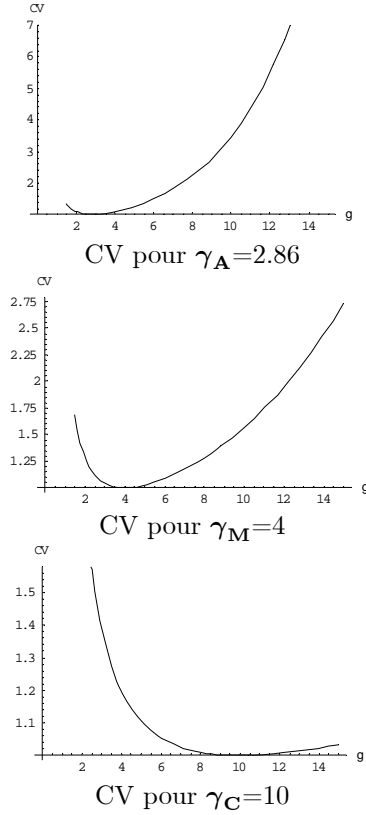


Fig 2. Les trois courbes de compensation

Dans la figure 3, nous considérons que l’investisseur est doté du portefeuille qui lui convient le mieux parmi ceux qui lui sont proposés. Ceci signifie que la compensation monétaire est minimisée. Avec une telle allocation optimale, cette compensation est matérialisée par l’enveloppe inférieure des trois courbes précédentes. Nous pouvons constater que, même dans ce cas, les pertes sont encore importantes. Elles peuvent encore atteindre 10% du montant initial investi.

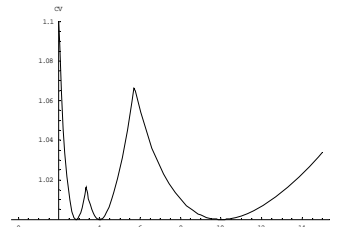


Fig. 3. Enveloppe inférieure de la CV

En se basant sur cette approche, il est possible d’optimiser la répartition préalable de l’offre des produits financiers si la distribution de probabilité $f(\gamma)$ des aversions au risque est connue. Ce problème est du

type :¹¹

$$\text{Min}_{\{\gamma_i, i=1, \dots, I\}} \int_0^\infty \min_{i=1, \dots, I} CV(\gamma, \gamma_i) f(\gamma) d\gamma.$$

3.2 Le cas non standard

3.2.1 Le profil du portefeuille optimal¹²

Nous supposons que l'utilité U de l'investisseur est injective et deux fois différentiable par morceaux. Notons J l'inverse de l'utilité marginale U' .

Introduisons la probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$ liée au comportement de l'investisseur vis-à-vis du risque, et notamment à sa façon de déformer les petites ou grandes probabilités. Notons-la sous la forme $\Phi[\mathbb{P}]$, où Φ représente la fonctionnelle servant à la déformation des probabilités initiales. L'investisseur résoud maintenant le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \text{Max } \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[V_T] \text{ sous } V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[V_T M_T] \\ \text{avec} \\ M_T = H_T^{-1} = \exp(-rT) \eta_T \end{aligned}$$

L'espérance $\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[V_T]$ est égale à

$$\int_0^\infty U[v] f_V(v) \psi(F_V(v)) dv. \quad (36)$$

Pour trouver la solution de ce problème, nous cherchons la valeur du portefeuille V comme fonction des deux actifs de base : $V = h(B_T, S_T)$. Il s'agit donc de résoudre :

$$\text{Max}_h \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[U[h(B_T, S_T)]] \text{ avec } V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h(B_T, S_T) M_T]. \quad (37)$$

Supposons que $X_T = (B_T, S_T)$ ait une densité notée f . Définissons la transformation $\hat{\psi}$ par :

$$\hat{\psi}[F(x)] = \psi[F_V(h(x))]. \quad (38)$$

L'espérance $\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[U(h(B_T, S_T))]$ est alors égale à

$$\int U[h(x)] f(x) \hat{\psi}[F(x)] dx. \quad (39)$$

Proposition 21 *Si la fonction de paiement optimale h^* est injective, le paiement optimal est donné par :*

$$h^* = J(\lambda g / \hat{\psi}(F)), \quad (40)$$

¹¹Ce problème n'est malheureusement pas convexe. Cependant, il peut être résolu numériquement par une procédure itérative appropriée (voir de Palma et Prigent, 2008) pour un nombre de portefeuilles standardisés quelconque.

¹²Voir Prigent (2007b) pour la solution de ce problème.

où λ désigne le multiplicateur de Lagrange tel que

$$V_0 = \int_{\mathbb{R}^+} J(\lambda g / \hat{\psi}(F)(x)) g(x) f(x) dx.$$

Dans ce qui suit, les résultats précédents sont illustrés pour le cas standard de l'utilité espérée et le cas de l'utilité anticipée. Les prix des options sont calculés à la "Black et Scholes."

Soit $sh = \frac{\theta_S}{\sigma}$ le ratio de Sharpe. Introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -\frac{1}{2} sh^2 T + \frac{sh}{\sigma} (\theta_S + r - 0.5\sigma^2) T, \\ \chi &= e^{\mathcal{A}} (S_0)^{\frac{sh}{\sigma}}, \quad \kappa = \frac{sh}{\sigma}. \end{aligned}$$

Rappelons que dans le modèle de Black et Scholes, nous avons :

$$W_T = \frac{\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) - mT}{\sigma}.$$

Nous en déduisons que l'espérance conditionnelle g du ratio $\frac{dQ}{dP}$ calculée par rapport à l'information engendrée par l'observation de S_T est donnée par :

$$g(S_T) \text{ où } g(s) = \chi s^{-\kappa}. \quad (41)$$

Les solutions sont illustrées pour le cas numérique suivant :

$$r = 4\%, \quad \mu = 10\%, \quad \sigma = 20\%, \quad B_0 = 1, \quad S_0 = 100.$$

L'investissement est fixé à $V_0 = 1000$ et l'horizon de temps T correspond à une année ($T = 1$).

3.2.2 Solution dans le cas de l'utilité espérée

Supposons que l'utilité de l'investisseur soit du type CRRA :

$$U(v) = \frac{v^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

avec $0 < \gamma < 1$ d'où nous déduisons que $J(y) = y^{\frac{-1}{\gamma}}$. Le paiement optimal est donné par :

$$h^*(s) = \frac{V_0 e^{rT}}{\int_0^\infty g(s)^{\frac{-1}{1-\gamma}} f(s) ds} \times g(s)^{\frac{-1}{\gamma}}. \quad (42)$$

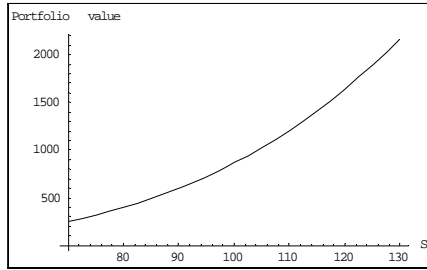
En conséquence, $h^*(s)$ vérifie :

$$h^*(s) = d \times s^\beta \text{ avec } d = c\chi^{\frac{-1}{\gamma}}, \text{ et } \beta = \frac{\kappa}{\gamma} > 0. \quad (43)$$

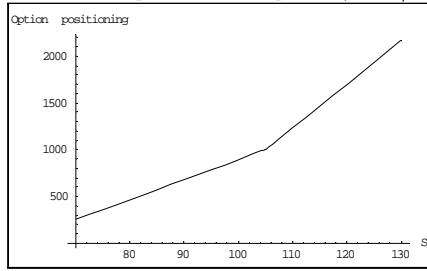
On peut noter que h^* est croissante. Cette propriété est vérifiée dès lors que l'utilité est concave et que la

densité g est décroissante, ce qui est le cas par exemple pour le modèle de Black et Scholes. La concavité/convexité de la fonction de paiement est déterminée par la comparaison entre l'aversion relative γ et le ratio $\kappa = \frac{\mu-r}{\sigma^2}$, qui correspond au ratio de Sharpe instantané divisé par la volatilité σ :¹³

- 1) h^* est concave si $\kappa < \gamma$.
- 2) h^* est linéaire si $\kappa = \gamma$.
- 3) h^* est convexe si $\kappa > \gamma$.



Valeur du portefeuille pour $\gamma = 1/2$



Position correspondante sur les options

Fig.4. Profil du portefeuille optimal (cas EU)

Selon les valeurs des paramètres financiers et l'aversion relative au risque, nous obtenons un paiement convexe puisque sur cet exemple nous avons $\beta = 3.5 > 1$. La position correspondante (approximative) sur les options est du type $V_T = 21 S_T + 25 (S_T - K)^+$, avec le prix d'exercice $K = 105$. Une option à la monnaie pourrait également être considérée ($K = S_0 = 105$).

3.2.3 Le cas de l'utilité anticipée

Nous considérons désormais des situations où les probabilités initiales sont déformées. Nous illustrons plus particulièrement le cas de "l'utilité anticipée".

L'investisseur a toujours une utilité CRRA :
 $U(v; \gamma) = \frac{v^{1-\gamma}}{1-\gamma}$.

¹³Voir par exemple Prigent (2007a).

La fonctionnelle $\varphi(f_V)$, qui caractérise la transformation de probabilité, est définie par $\varphi(f_V)(v) = f_V(v)\psi(F_V)(v)$ avec :

$$\psi(F_V)(v) = w'_\gamma[F_V(v)]. \quad (44)$$

Considérons le cas :

$$w_\delta(p) = \frac{p^\delta}{(p^\delta + (1-p)^\delta)^{\frac{1}{\delta}}}. \quad (45)$$

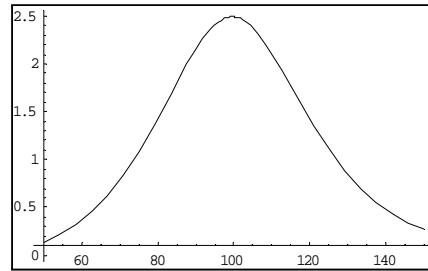
Nous en déduisons :

$$w'_\delta(p) = \frac{p^{\delta-1} [(\delta-1)p + \delta(1-p)^\delta + p(1-p)^{\delta-1}]}{(p^\delta + (1-p)^\delta)^{\frac{1}{\delta}+1}}. \quad (46)$$

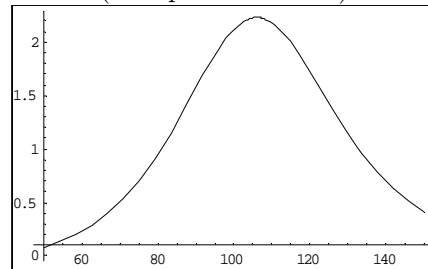
Un indice clé ζ pour déterminer la forme du paiement optimal du portefeuille est donné par le ratio de deux densités (la première g correspond à la valorisation des actifs financiers, l'autre $\psi(F_V)(v)$ à la déformation des probabilités à la Quiggin) :

$$\zeta \equiv \frac{g}{\psi(F_V)(v)} = \frac{g}{w'_\gamma[F_V(v)]}. \quad (47)$$

Comme $V = h(S)$, la fonction $w'_\gamma[F_V(v)]$ peut s'exprimer à l'aide de la fonction de répartition $F_S(\cdot)$ de S , en distinguant les cas où la fonction de paiement h est ou non croissante. Ceci nous conduit à examiner les deux fonctions $\frac{g(s)}{w'_\delta(F_S)(s)}$ et $\frac{g(s)}{w'_\delta(1-F_S)(s)}$. Sous les hypothèses faites sur les paramètres financiers et en supposant que $\delta = 0.61$, leurs graphes ont les allures suivantes :



Indice $\zeta = \frac{g(\cdot)}{w'_\delta(F_S)(\cdot)}$
(max pour $s^* = 99.5$)



Indice $\zeta = \frac{g(\cdot)}{w'_\delta(1-F_S)(\cdot)}$
(max pour $s^{**} = 106.1$)

Fig.5. Ratio ζ des transformations de probabilité

Supposons par exemple qu'il existe un point pivot s^* tel que, sur l'intervalle $]0, s^*]$, la fonction de paiement h soit décroissante et que sur $]s^*, \infty[$ elle soit croissante. Notons $n_S = w_\delta[F_S(s^*)] + w_\delta[1 - F_S(s^*)]$.

La transformation de probabilité $\widehat{\Psi}$ vérifie :

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}(F_S)(s) &= w'_\delta[F_S(s)]/n_S, \text{ si } h^* \text{ est croissante,} \\ \widehat{\psi}(F_S)(s) &= w'_\delta[1 - F_S(s)]/n_S, \text{ si } h^* \text{ est décroissante.}\end{aligned}$$

Puisque l'utilité est concave ($\gamma = 0.5$), la solution optimale $h^*(.)$ est une fonction décroissante des ratios $\frac{g(.)}{w'_\delta(F_S)(.)}$ et $\frac{g(.)}{w'_\delta(1-F_S)(.)}$. Selon les variations de ces fonctions (voir la figure 5), le paiement optimal est nécessairement décroissant sur $]0, s^*]$ et croissant sur $]s^*, \infty[$. Sur l'intervalle $[s^*, s^{**}]$, nous avons toujours : $\frac{g(.)}{w'_\delta(F_S)(.)} \geq \frac{g(.)}{w'_\delta(1-F_S)(.)}$. Par conséquent, de la relation générale (40), nous déduisons que le paiement optimal est donné par :

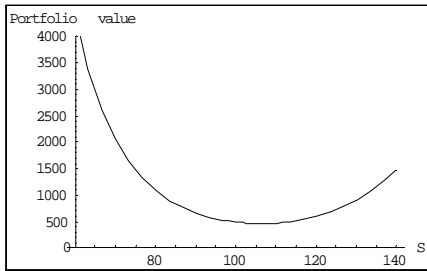
$$h^*(s) = \frac{V_0 e^{rT}}{\int_0^\infty \left(\frac{g(s)}{\widehat{\psi}(F_S)(s)} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} g(s) f(s) ds} \times \left(\frac{g(s)}{\widehat{\psi}(F_S)(s)} \right)^{\frac{-1}{\gamma}}, \quad (48)$$

avec

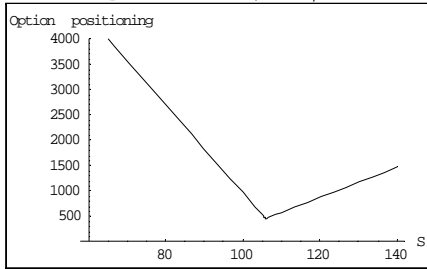
$$\widehat{\psi}(F_S)(s) = w'_\delta[1 - F_S(s)]/n_S, \text{ si } s \in]0, s^*], \quad (49)$$

$$\widehat{\psi}(F_S)(s) = w'_\delta[F_S(s)]/n_S, \text{ si } s \in]s^*, \infty[. \quad (50)$$

Pour le cas numérique considéré et $\gamma = 0.5$ avec $\delta = 0.61$, nous obtenons les configurations suivantes :



Valeur du portefeuille $\gamma = 1/2$, $\delta = 0.61$



Position correspondante en options

Fig.6. Profil du portefeuille optimal (cas AU)

Ainsi, selon les valeurs des paramètres de marché et les paramètres "comportementaux", nous obtenons un profil optimal qui est d'abord décroissant puis croissant. La valeur approchée de la position correspondante a l'allure d'un straddle $V_T = q_c(S_T - K)^+ + q_p(K - S_T)^+$ où $q_c \simeq 30$ et $q_p \simeq 87$, avec un prix d'exercice $K = 106$ (dans le cas du straddle standard, on a $q_c = q_p$). En pratique, on peut utiliser des options à la monnaie.

Remarque 22 La surpondération d'évènements relativement "rares" conduit l'investisseur à adopter un positionnement sur les options basé sur la réalisation d'évènements relativement "extrêmes" : fortes baisses ou hausses significatives. Ce type de stratégie correspond usuellement à une anticipation d'une forte volatilité. Cependant, comme montré dans la figure 4, pour un investisseur maximisant son utilité espérée, une telle anticipation conduit à un paiement plus convexe mais il doit être toujours croissant en raison du fait que la densité de probabilité neutre au risque g est décroissante et que l'inverse J de l'utilité marginale est décroissante. Ceci signifie donc que l'investisseur désire un fort paiement uniquement dans le cas d'une hausse substantielle du marché et non pas en cas de baisse marquée.

Dans ce contexte, nous pouvons déterminer la compensation liée à la déformation "comportementale" de la probabilité objective. Soit en effet $V_{\widehat{\Psi}}^*$ la valeur du portefeuille optimal qui prend en compte la déformation comportementale des probabilités et soit V^* celle ne correspondant à aucune déformation. La variation compensatoire se déduit alors de l'égalité suivante :

$$E_{\widehat{\Psi}}[U(V_{\widehat{\Psi}}^*); V_0] = E_{\widehat{\Psi}}[U(V^*); \tilde{V}_0]. \quad (51)$$

Proposition 23 La compensation résultant de la non prise en compte de la déformation des probabilités initiales dans le cadre de la recherche du positionnement optimal est donnée par

$$\frac{\tilde{V}_0}{V_0} = \left[\frac{\int g \left(\frac{-1}{\gamma} \right) g f}{\int g \left(\frac{-1}{\gamma} \right) g f} \right] * \left[\frac{\int \left(\frac{g}{\widehat{\psi}} \right)^{((\gamma-1)/\gamma)} \widehat{\Psi} f}{\int g^{((\gamma-1)/\gamma)} \widehat{\Psi} f} \right]^{\left(\frac{1}{1-\gamma} \right)}.$$

Ce résultat est illustré dans le graphique 7 suivant.

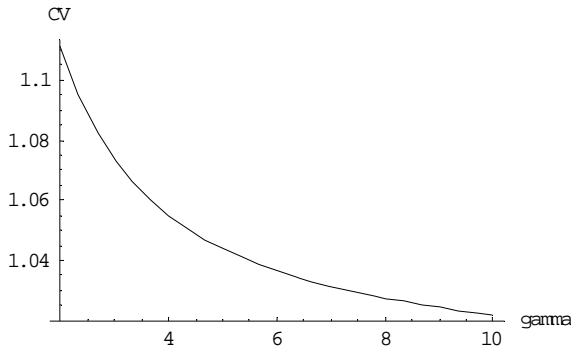


Fig.7. CV pour la déformation de probabilités

Nous constatons que, pour de faibles aversions au risque, la compensation peut atteindre de très fortes valeurs (+10%), phénomène déjà observé dans le cadre de la gestion standard (voir Figure 3). L'ordre de grandeur de la compensation en cas de déformation des probabilités correspond approximativement à une erreur de prévision sur le drift μ par exemple du type : "la vraie valeur vaut -1% et la valeur utilisée dans le calcul d'optimisation vaut 12% (ou vice versa)".

Notons que, dans ce cas, la fonctionnelle de déformation Ψ est égale au ratio de la densité f de la probabilité historique avec un drift égal à μ sur la densité \tilde{f} de la probabilité historique avec un drift égal à $\tilde{\mu}$.

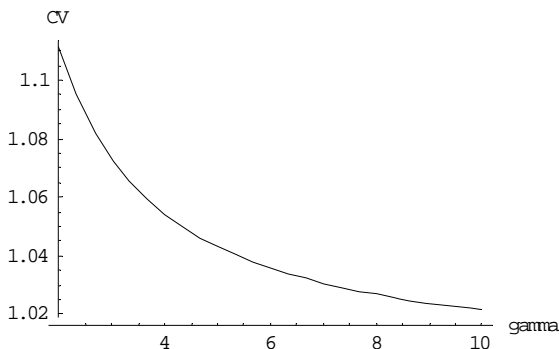


Fig.8. CV pour l'erreur sur le drift μ

D'autres situations peuvent être envisagées, par exemple lorsque l'investisseur présente une aversion aux pertes telle que décrite dans Tversky et Kahneman (1992), ce qui se traduit par une fonction d'utilité convexe sur la partie "perte". Traditionnellement, ce seuil correspond à une valeur à partir de laquelle l'investisseur estime avoir perdu par rapport à un résultat possible (perte réelle, perte par rapport à un placement sans risque, perte par rapport à une contrainte de garantie...). Comme montré par exemple dans Roger (2008), Pfiffelmann (2008) et Pfiffelmann

et Roger (2005), le choix à priori de ce seuil est loin d'être négligeable.

4 RiskToleranceOnLine : approche et résultats

4.1 Vers une version économétrique

Lorsque le modélisateur représente les choix effectués par un individu, ils peuvent tous les deux commettre des erreurs d'approximation, regroupées pour simplifier dans un unique terme d'erreur ou facteur idiosyncratique modélisé comme une variable aléatoire.

Différents auteurs (voir en particulier Manski, 1977; McFadden, 2001; Anderson, de Palma et Thisse, 1992) ont proposé plusieurs raisons pour justifier ce terme d'erreur. La première discussion de ce type date de Thurstone (1927) et de sa "loi des jugements comparatifs". Nous relevons ici les facteurs à prendre en compte dans notre discussion de choix en situation risquée.

1. *Erreurs de modélisation* pour tenir compte, en particulier, du fait que les fonctions d'utilité supposées ne constituent pas des descriptions parfaites des préférences.
2. *Erreurs de mesure* sur les facteurs observables, ainsi que *facteurs non observables* tels que le revenu réel de l'individu, son état de santé, etc...
3. *Biais de perception de la part de l'individu* : ces biais sont soit systématiques et cohérents d'une occasion de décision à une autre soit incohérents et dépendants des circonstances du moment, de l'état d'esprit de l'individu, d'un éventuel effet de cadrage, etc...
4. *Facteurs irrationnels qui peuvent influencer certaines décisions*. Par exemple, l'individu peut se tromper, être sous l'influence d'un mauvais conseiller, sortir d'une expérience malheureuse, être superstitieux, etc...

Revenons sur la prise de décision considérée. La règle de décision déterministe pour l'individu k , caractérisé par une aversion au risque $\gamma^{(k)}$, est la suivante : $R \succ_k C$ si et seulement si $\mathbb{E}[U(R; \gamma^{(k)})] > U(C; \gamma^{(k)})$, c'est-à-dire si et seulement si $\gamma^{(k)} < \gamma^*$, où le seuil d'indifférence entre l'option certaine et l'option risquée, γ^* , est défini par $\mathbb{E}[U(R; \gamma^*)] = U(C; \gamma^*)$ (un individu est indifférent entre les deux options lorsque son aversion au risque vaut γ^*). Pour rendre compte

des quatre types d'erreur exposés ci-dessus, on modélise l'aversion au risque de cet individu k comme une variable aléatoire, dont la distribution dépend des caractéristiques observables $Z^{(k)}$ de l'individu k .

Le terme d'erreur rend compte à la fois de comportements différents vis-à-vis des mêmes risques pour différents individus apparemment identiques (mêmes caractéristiques observables $Z^{(k)}$) et de différences de comportement pour un même individu faisant face aux mêmes choix, mais à des occasions différentes. En pratique, un expérimentateur ne peut au mieux que prédire la probabilité qu'un individu donné k opte pour le choix certain. Les modèles que nous proposons sont en un sens moins ambitieux que les modèles de théoriques de décision, puisqu'ils admettent, d'emblée, l'impossibilité de prédire avec certitude le comportement d'un individu. Le degré de fiabilité des prédictions peut être mesuré et constitue de ce fait une nouvelle sortie du modèle.

Nous avons développé une approche de type Probit Ordonné (Small, 1981) pour obtenir une mesure ordinaire ainsi qu'une mesure cardinale de l'aversion au risque des répondants. Le modèle Probit Ordonné correspond à une version spécifique des modèles de choix discrets qui sont adaptés aux situations où une variable est naturellement ordonnée, comme dans les données collectées via le site RiskToleranceOnLine.

4.2 Description du site

Le site <http://www.RiskToleranceOnLine.com> est constitué d'un questionnaire calibré et personnalisé, et d'outils de gestion dédiés aux décisions des investisseurs. Le questionnaire utilisé est relativement "lourd" étant donné qu'il permet d'explorer différentes fonctions d'utilité et différentes déviations à la théorie de l'utilité espérée.

La version actuelle est un prototype qui permet :

1. D'évaluer les préférences et les perceptions des investisseurs.
2. De mesurer quantitativement les niveaux d'aversion au risque des investisseurs pour chacun de leurs projets d'investissement. Cette mesure constitue un input crucial aux modèles de gestion de portefeuille, de gestion des retraites, etc...
3. D'allouer, sous des hypothèses très générales, les investisseurs en classes de risque spécifiques utilisées pour la segmentation des clients.
4. De proposer à chaque répondant les types de produits les mieux adaptés. Ces produits sont ensuite traduits aux investisseurs en termes intuitifs de niveaux de risque.
5. De fournir aux responsables en "asset management" des données sur leur clientèle pour les aider à positionner les fonds offerts aux investisseurs.
6. De répondre aux préoccupations des législateurs dans le cadre des directives européennes MiFID relatives à l'information de la clientèle et à la protection des investisseurs contre des risques excessifs (étant données leurs capacités financières et psychologiques à prendre des risques). Il s'agit de faire supporter au client le niveau de risque adéquat. Cette directive fait écho aux procès intentés à des institutions financières par des investisseurs estimant avoir été amenés à faire face à des risques trop importants.

Dans la version définitive, les résultats des parties (1) et (2) permettent de construire un questionnaire succinct calibré, basé sur les questions les plus significatives de RiskToleranceOnLine (d'un point de vue statistique).

Ce questionnaire capture les facettes principales des attitudes et des comportements face au risque. Des formulations classiques (en utilité espérée) et moins classiques (en utilité non-espérée) sont testées et utilisées. Les mesures effectuées sont quantitatives (les méthodes économétriques utilisées dépassent le cadre de cet article et feront l'objet de présentations ultérieures) et associées à un degré de fiabilité.

Les parties principales de ce questionnaire sont décrites brièvement dans l'appendice; la méthode d'estimation et les résultats obtenus les plus saillants sont brièvement exposés ci-dessous.

4.3 Estimation

La version proposée aux étudiants comporte 10 séries de 3 loteries, alors que la version proposée aux autres répondants ne comporte que 2 séries de 3 loteries. Nous avons utilisé des techniques de panel pour estimer la façon dont l'aversion au risque varie à la fois entre individus et, pour un même individu, d'une série de loteries à l'autre. En notant l la série concernée, $Z^{(k,l)}$ les variables explicatives de l'aversion au risque (ces variables peuvent dépendre non seulement de l'individu k et de son projet d'investissement, mais aussi de la série l de loteries concernée) et β le vecteur de coefficients

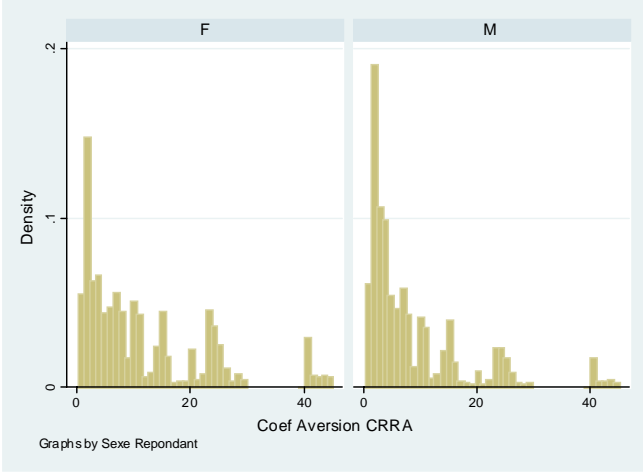


Figure 2: Distribution de γ par sexe (utilité CRRA)

associé, on obtient :

$$Z^{(k,l)}\beta + \tau\xi^{(k)} + \varepsilon^{(k,l)} \equiv \nu^{(k,l)},$$

où $\nu^{(k,l)}$ mesure l'aversion au risque (normalisée, ordinale) de l'individu k lorsqu'il répond à la série l , et $\tau\xi^{(k)}$ représente une hétérogénéité individuelle non observable (effet individuel), supposée suivre une loi normale d'espérance nulle et d'écart-type τ à estimer. Le terme d'erreur est ainsi décomposé en un terme $\tau\xi^{(k)}$ spécifique à l'individu et un terme résiduel $\varepsilon^{(k,l)}$ suivant une loi normale centrée réduite et variant indépendamment d'une série à l'autre pour un même individu.

Des tests préliminaires ont conduit à rejeter les préférences de type CARA, alors que les préférences de type CRRA semblent constituer une bonne approximation des préférences individuelles, surtout lorsque l'on se limite aux loteries qui ne comportent pas de pertes. L'analyse ci-dessous se concentre donc sur l'estimation cardinale de préférences CRRA.

4.4 Résultats préliminaires

La base comporte 30% de femmes et 70% d'hommes. Les femmes sont beaucoup plus averses au risque que les hommes (l'aversion relative au risque moyenne est de 11,4 pour les femmes contre 8,4 pour les hommes). Moins de 21% des femmes ont une aversion au risque γ inférieure à 2 et près de 10% ont une aversion au risque γ supérieure à 25, contre 25,5% et 6% pour les hommes.

Les étudiants étant surreprésentés dans l'échantillon, les célibataires sont très majoritaires. Il a été néanmoins possible de mettre en évidence l'effet du statut

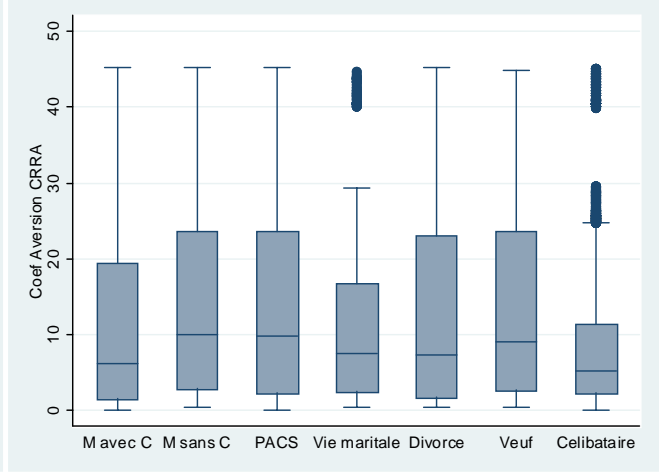


Figure 3: Distribution de γ par statut matrimonial

matrimonial sur l'aversion au risque. Sur la figure 3, les boîtes matérialisent, pour chaque statut matrimonial, l'intervalle interquartile du coefficient d'aversion au risque, avec un trait pour la médiane. Les personnes mariées avec contrat de mariage sont plus averses au risque que les célibataires, mais les personnes mariées sans contrat de mariage ou pacsées (et, dans une moindre mesure, celles vivant maritalement) sont encore plus averses au risque.

Les personnes investissant dans le but de laisser un héritage sont plus averses au risque que la moyenne. Les moins averses au risque sont celles qui investissent dans le but de faire fructifier leur patrimoine ou de générer des revenus à terme, puis celles souhaitant générer des revenus réguliers, celles souhaitant préparer leur retraite ou acheter des biens durables.

L'aversion au risque est apparemment décroissante avec le montant investi (choisi par le répondant, donc endogène), mais elle est croissante avec le montant généré aléatoirement (et donc exogène) pour chaque série. Il semble donc que, lorsque le montant investi croît, le répondant perçoit un risque plus élevé, ce qui le rend plus aversé au risque. Mais d'autre part, les personnes les plus averses au risque ont tendance à investir des sommes moins importantes. Il en résulte un biais d'endogénéité qui s'oppose au véritable effet du montant investi sur le niveau d'aversion au risque.

L'aversion au risque est apparemment croissante avec la durée de l'investissement (choisie par le répondant, donc endogène), mais elle est décroissante avec la durée générée aléatoirement (et donc exogène) pour chaque série. Il semble donc que le répondant pense que les investissements de long terme sont moins risqués, ce qui le rend moins aversé au risque. Par ailleurs, cette

croissance incite les personnes les plus averses au risque à investir sur des durées plus longues. Il en résulte un biais d'endogénéité qui s'oppose au véritable effet de la durée de l'investissement sur le niveau d'aversion au risque.

Par rapport au cas des rendements binaires équiprobables, l'aversion au risque mesurée est plus grande lorsque des rendements uniformes sont proposés. Cela peut être dû au fait que, dans ce cas, des rendements très faibles sont envisagés, ce qui peut traduire une forte aversion aux pertes. L'aversion au risque semble beaucoup plus faible lorsque de très petites probabilités sont envisagées, ce qui peut résulter d'une tendance à la déformation des probabilités.

Lorsque l'on ne contrôle aucune variable explicative, l'aversion au risque mesurée varie autant d'une série à l'autre pour un même répondant qu'en moyenne d'un répondant à l'autre. En d'autres termes, la corrélation entre l'aversion au risque mesurée pour un même répondant à différentes séries de loteries est de l'ordre de 37%. Ces résultats persistent lorsque l'on contrôle une série de variables explicatives caractéristiques du répondant, de son investissement ou de la série de loteries. Nos résultats montrent un lien important et complexe entre l'aversion au risque et les caractéristiques de l'investissement telles que son montant et sa durée.

5 Conclusion

L'évolution des services offerts aux investisseurs requiert le développement et la mise en place opérationnelle d'outils quantitatifs de mesure de l'attitude face au risque. De nombreuses recherches en sciences de la décision ont permis de développer des méthodes et des outils d'analyse des décisions individuelles en environnement risqué, d'abord dans le cadre classique de l'utilité espérée et ensuite dans celui plus flexible de l'utilité non-espérée. Les données utilisées dans les études académiques sont soit collectées dans le cadre d'enquêtes, soit collectées dans le cadre d'expériences (économie expérimentale). A ce jour, il manque crûment des recherches basées sur des comportements effectifs des investisseurs, ainsi que sur la relation entre les préférences déclarées des investisseurs (ce que les investisseurs disent qu'ils feront dans des situations hypothétiques) et leurs préférences révélées (ce que les investisseurs font effectivement en situation).

Dans cet article, après avoir mis en évidence les problèmes de positionnement de portefeuilles, nous avons présenté les bases d'une méthode économétrique

pour mesurer l'attitude face au risque des investisseurs. Pour valider cette approche, nous avons collecté un panel de données et appliqué notre méthode d'élicitation des préférences utilisée pour sélectionner, sur une base économétrique, la fonction d'utilité permettant de décrire le mieux les préférences des répondants. Notre analyse suggère que les fonctions d'utilité les plus adéquates sont de type CRRA et que la formulation non-EU (impliquant des déformations des probabilités et une aversion aux pertes) est plus appropriée que la formulation EU pour décrire de manière satisfaisante les choix des répondants. Bien évidemment, des conclusions différentes sont possibles pour d'autres populations d'investisseurs (potentiels ou effectifs).

Les résultats de notre analyse constituent une source d'information quantitative très précieuse, puisqu'ils permettent :

1. D'alimenter un modèle d'optimisation de portefeuille.
2. De mesurer le degré d'adéquation d'un portefeuille aux préférences de l'investisseur.
3. De positionner un ensemble de fonds de placement afin de satisfaire au mieux les préférences diversifiées d'une population d'investisseurs.
4. D'effectuer des conseils et des recommandations basées sur les préconisations de la directive MiFID.

Notons, pour terminer, que la directive MiFID, qui est entrée en application le 1er novembre 2007, souffre encore à notre avis d'un certain nombre d'imperfections. Ainsi, elle semble ignorer les contraintes inhérentes à la structure familiale. De fait, les décisions prises dans les couples ne sont pas toujours des décisions individuelles : elles peuvent en particulier impliquer le conjoint ou les enfants. Ces aspects devront être abordés dans des travaux ultérieurs.

References

- [1] Anderson, S., de Palma, A., Thisse, J.-F. (1992): *Discrete Choice Theory of Product Differentiation*, MIT Press, 423 p.
- [2] Bajeux-Besnainou, I., Jordan, J.V., Portait, R. (2001): An asset allocation puzzle: comment. *American Economic Review*, 1170-1179.
- [3] Bajeux-Besnainou, I., Jordan, J.V., Portait, R. (2003): Dynamic asset allocation for stocks, bonds and cash, *Journal of Business*, 76 (2), 263-287.

- [4] Ben-Akiva, M., de Palma, A., Bolduc, D. (2002): Econometric methods to assess investor's risk tolerance, paper presented at the *European Investment Review* meeting, London School of Economics.
- [5] Brennan M.J., Xia Y., (2000): Stochastic interest rates and the bond-stock mix, *European Finance Review*, 4,197-210.
- [6] Broihanne, M.-H., Merli, M., Roger, P. (2004): *Finance Comportementale*, Economica.
- [7] Campbell, J.Y., Viceira, L.M. (2002): *Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-Term Investors*, Oxford University Press, Oxford.
- [8] Cox, J., Huang, C.F. (1989): Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process. *Journal of Economic Theory*, 33-83.
- [9] Eeckhoudt ,L., Gollier, C, Schlesinger, H., (2005): *Economic and Financial Decisions Under Risk*, Princeton University Press.
- [10] Gollier, C, (2001): *The Economics of Risk and Time*. The MIT Press, Cambridge, MA.
- [11] Grandin, P. (2005): La finance comportementale, *Banque et Marchés*, 76, 81-86.
- [12] de Palma, A., Picard, N. (2009), *Directive sur les Marchés Financiers : contribution des études sur l'attitude et les comportements face au risque*, Policy Paper préparé pour l'Observatoire de l'Épargne Européenne.
- [13] de Palma, A., Picard, N., Ziegelmeier, A. (2007), Individual and Couple Decision Behavior under Risk : The Power of Ultimate Control. Working paper N° 2007-03.
- [14] de Palma, A., Ben-Akiva, M., Brownstone, D., Holt, C., Magnac, T., McFadden, D., Moffatt, P., Picard, N., Train, K., Wakker, P., Walker, J. (2008): Risk, uncertainty and discrete choice models, *Marketing Letters*, 19, 269-285.
- [15] de Palma, A., Picard, N. (2003): Measuring risk tolerance. Working paper. University of Cergy-Pontoise, THEMA, France.
- [16] de Palma, A., Picard, N., Prigent, J.-L. (2007): Eliciting utility for (non)expected utility preferences using invariance transformations. Proceedings of the XIII International Conference on the Foundations and Applications of Utility, Risk and Decision Theory, FUR XIII, (Barcelone, Juillet 2008).
- [17] de Palma, A., Prigent, J.-L. (2008): Utilitarianism and fairness in portfolio positioning, *Journal of Banking and Finance*, 32, 1648-1660.
- [18] de Palma, A., Prigent, J.-L. (2009): Standardized versus customized portfolio: a compensating variation approach, *Annals of Operations Research*, 165(1), 161-185.
- [19] Detemple, J. R. Garcia, Rindishbacher, M. (2003): A Monte Carlo method for optimal portfolios, *Journal of Finance*, 58, 401-446.
- [20] Dexter, A.S., Yu, J.N.W., Ziemba, W.T., (1980): Portfolio selection in a lognormal market when the investor has a power utility: computational results, in *Stochastic Programming*, M.A.H. Dempster (Ed.), Academic Press, New-York, 507-523.
- [21] El Karoui, N. and M. Jeanblanc, (1998): Optimization of consumption with labor income, *Finance and Stochastics*, 2, 409-440.
- [22] Elton, E., Gruber, M. (1995): *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, J. Wiley, New York.
- [23] Fabozzi, F., (1996): *Bond Markets Analysis and Strategies*. 3rd ed. Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall.
- [24] Fishburn, P.C. (1970): *Utility Theory for Decision-Making*, New York, Wiley.
- [25] Fishburn, P.C. (1988a): Expected utility: an anniversary and a new era, *Journal of Risk and Uncertainty*, (Historical archive), 1, 267-283.
- [26] Fishburn, P.C. (1988b): *Non-Linear Preference and Utility Theory*, Baltimore: Johns Hopkins University Press.
- [27] Fong, F. (1990): Portfolio construction : fixed income. In John L. Maginn and Donald L. Tuttle, eds., *Managing investment portfolios : a dynamic process*. 2nd ed. Boston : Warren, Gorham and Lamont.
- [28] Friedman, M., Savage, L. (1948) : Utility analysis of choices involving risk, *Journal of Political Economics*, 56, 279-304.
- [29] Gollier C., Eeckhoudt, L., Schlesinger, H. (2005), *Economic and Financial Decisions under Risk*, Princeton University Press.
- [30] Hadar, J., Russel, W.R. (1969) : Rules for Ordering Uncertain Prospects, *American Economic Review*, 59(1), 25-34.
- [31] Hanoch, G., Lévy, H. (1969) : The efficiency analysis of choices involving risk, *Review of Economic Studies*, 36, 335-346.

- [32] He, H., Pearson, N., (1991) : Consumption and portfolio policies with incomplete markets and short sales constraints, *J. Economic Theory*, 54, 258-305.
- [33] Hotelling, H. (1929) : Stability in Competition, *Economic Journal*, 39, 41-57.
- [34] Jensen, B.A., Sorensen, C. (2001) : Paying for minimum interest rate guarantees : who should compensate who ?, *European Financial Management*, 183-211.
- [35] Kallberg, J.G., Ziemba, W.T. (1983) : Comparison of alternative utility functions in portfolio selection problems, *Management Science*, 29 (11), 1257-1276.
- [36] Lioui, A., Poncet, P. (2001) : On optimal portfolio choice under stochastic interest rates, *J. Econ. Dyn. Control*, 25, 1841-1865.
- [37] Lioui, A., Poncet, P. (2005) : *Dynamic Asset Allocation with Forwards and Futures*, Springer : Berlin.
- [38] Long, J.B., (1990) : The numeraire portfolio. *Journal of Financial Economics*, 26, 29-69.
- [39] Manski, C. (1977) : The structure of random utility models. *Theory and Decisions*, 8, 229-254.
- [40] McFadden, D. (2001) : Economic choices. *American Economic Review*, 91(3), 351-378.
- [41] Merton, R. (1971) : Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory*, 3, 373-413.
- [42] Merton, R. (1992) : *Continuous-Time Finance*. Cambridge : Basil Blackwell.
- [43] Pfiffelmann, M. (2008) : Why expected utility theory cannot explain LLDA?," *The ICAFI Journal of Behavioral Finance*.
- [44] Pfiffelmann, M., P. Roger, (2005) : Les comptes d'épargne associés à des loteries : Approche comportementale et études de cas, *Banque et Marchés*, 78, 16-23.
- [45] Prigent, J.-L. (2007a) : *Portfolio Optimization and Performance Analysis*, Chapman & Hall, (Florida, USA).
- [46] Prigent, J.-L. (2007b) : Portfolio optimization and rank dependent expected utility. Proceedings of the Fifth World Congress of the Bachelier Finance Society. (Londres, Imperial College, Juillet 2008).
- [47] Quiggin, J. (1982) : A theory of anticipated utility, *Journal of Economic Behavior and Organization*, 8, 641-645.
- [48] Roger, P. (2008) : Capital protected notes for loss averse investors :how should they be advertised? document de travail, LARGE, Université de Strasbourg.
- [49] Rothschild, M., Stiglitz, J. E. (1970) : Increasing risk : I. A definition. *Journal of Economic Theory*, 2, 225-243.
- [50] Rothschild, M., Stiglitz, J. E. (1971) : Increasing risk : II. Its economic consequences, *Journal of Economic Theory*, 3, 66-84.
- [51] Small, K. (1987) : A discrete choice model of ordered alternatives. *Econometrica* 55, 409-424.
- [52] Sorensen, C. (1999) : Dynamic asset allocation and fixed income management, *J. Financial and Quantitative Analysis*, 34 (4), 513-531.
- [53] Tallon, J.-M. (1997) : Risque microéconomique et prix d'actifs dans un modèle d'équilibre général avec espérance d'utilité dépendante du rang. *Finance*, 18, 139-153.
- [54] Thustone, L. (1927) : A law of comparative judgements. *Psychological Reviews*, 34, 273-286.
- [55] Tversky, A., Kahneman, D. (1992) : Advances in prospect theory : cumulative representation of uncertainty, *Journal of Risk and Uncertainty*, 5, 297-323.
- [56] von Neumann, J. , Morgenstern, O. (1944) : *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press.
- [57] Yaari, M. E. (1987) : The dual theory of choice under risk, *Econometrica*, 55, 95-115.

6 Appendices

6.1 Appendice A : calcul de compensations

Preuve de la Proposition 23

Nous déterminons ci-après la compensation résultant de la non prise en compte de la déformation des probabilités initiales dans le cadre de la recherche du positionnement optimal. Rappelons que $V_{\hat{\Psi}}^*$ désigne la valeur du portefeuille optimal qui prend en compte la déformation comportementale des probabilités et V^* celle qui ne correspond à aucune déformation. La variation compensatoire se déduit de l'égalité suivante :

$$E_{\hat{\Psi}}[U(V_{\hat{\Psi}}^*); V_0] = E_{\hat{\Psi}}[U(V^*); \tilde{V}_0]. \quad (52)$$

Or, d'après les relations (42) et (48), les paiements optimaux respectivement sans et avec déformation des probabilités, sont donnés par :

$$V^* = h^*(s) = \frac{V_0 e^{rT}}{\int g^{\frac{-1}{\gamma}} gf} \times g(s)^{\frac{-1}{\gamma}}, \quad (53)$$

et

$$V_{\widehat{\Psi}}^* = h_d^*(s) = \frac{V_0 e^{rT}}{\int \left(\frac{g}{\widehat{\psi}(F_S)}\right)^{\frac{-1}{\gamma}} gf} \times \left(\frac{g(s)}{\widehat{\psi}(F_S)(s)}\right)^{\frac{-1}{\gamma}}. \quad (54)$$

Nous en déduisons donc :

$$E_{\widehat{\Psi}}[U(V_{\widehat{\Psi}}^*); V_0] =$$

$$\frac{1}{(1-\gamma)} \left[\frac{V_0 e^{rT}}{\int \left(\frac{g}{\widehat{\psi}}\right)^{\frac{-1}{\gamma}} gf} \right]^{(1-\gamma)} \int \left(\frac{g}{\widehat{\psi}}\right)^{\frac{-(1-\gamma)}{\gamma}} \widehat{\Psi} f \quad (55)$$

et

$$E_{\widehat{\Psi}}[U(V^*); \widetilde{V}_0] =$$

$$\frac{(\widetilde{V}_0 e^{rT})^{1-\gamma}}{(1-\gamma)} \left[\frac{V_0 e^{rT}}{\int g^{\frac{-1}{\gamma}} gf} \right]^{(1-\gamma)} \int g^{\frac{-(1-\gamma)}{\gamma}} \widehat{\Psi} f$$

La compensation résultant de la non prise en compte de la déformation des probabilités initiales dans le cadre de la recherche du positionnement optimal est donc donnée par :

$$\frac{\widetilde{V}_0}{V_0} = \left[\frac{\int g^{\left(\frac{-1}{\gamma}\right)} gf}{\int \left(\frac{g}{\widehat{\psi}}\right)^{\left(\frac{-1}{\gamma}\right)} gf} \right] * \left[\frac{\int \left(\frac{g}{\widehat{\psi}}\right)^{\left(\frac{-(\gamma-1)}{\gamma}\right)} \widehat{\Psi} f}{\int g^{\left(\frac{-(\gamma-1)}{\gamma}\right)} \widehat{\Psi} f} \right]^{\left(\frac{1}{1-\gamma}\right)}.$$

6.2 Appendice B : le questionnaire

Le questionnaire comporte une série de questions relatives aux caractéristiques de l'investisseur (sexe, âge, statut matrimonial, pays de résidence, monnaie de référence), une série de questions relatives à son projet d'investissement (objectif d'investissement, montant investi, durée de l'investissement), puis 10 séries de loteries (pour les étudiants).

Dans les trois premières séries de loteries, les rendements considérés sont uniformes sur un intervalle spécifique à la loterie. Chaque série comporte 7 loteries qui sont ordonnées au sens de la dominance stochastique d'ordre 2 (même moyenne, variances croissantes).

Dans les trois séries suivantes, les rendements suivent une loi binaire avec une chance sur 2 pour le rendement inférieur et 1 chance sur 2 pour le rendement supérieur. Chaque série comporte 7 loteries qui sont ordonnées au sens de la dominance stochastique d'ordre 1 (d'une loterie à la suivante, seul le rendement inférieur ou le rendement supérieur change).

Les séries 7 et 8 offrent une faible probabilité (variable d'une question à l'autre) de perte importante. Pour une série donnée, les rendements inférieur et supérieur sont fixés, et la probabilité de perte importante est croissante d'une loterie à la suivante dans la série, ce qui permet de classer les loteries d'une série au sens de la dominance d'ordre 1.

Les séries 9 et 10 offrent une faible probabilité (variable d'une question à l'autre) de rendement très élevé ("jackpot"). Pour une série donnée, les rendements inférieur et supérieur sont fixés, et la probabilité de jackpot est croissante d'une loterie à la suivante dans la série, ce qui permet de classer les loteries d'une série au sens de la dominance d'ordre 1.