PROGRAMME D'APPROFONDISSEMENT MASTER 1 DE MATHÉMATIQUES

Année 2019 – 2020

POUR LA PATRIE LES SCIENCES ET LA GLOIRE

SOMMAIRE

PROGRAMME D'APPROFONDISSEMENT
Master 1 de mathématiques

Responsable :
Stéphane Bijakowski
stephane.bijakowski@polytechnique.edu

Les mathématiques fascinent par la rigueur et la perfection esthétique de leurs constructions. Elles sont le socle des mathématiques appliquées et ont toujours joué un rôle fondamental dans le développement des sciences. L'une des spécificités de l'École polytechnique a d'ailleurs été, dès le début du XIXe siècle, la place centrale attribuée aux mathématiques et, notamment, aux mathématiques fondamentales.

Les mathématiques sont une école de rigueur et d'abstraction ; elles sont également le langage universel des sciences et un instrument incontournable dans un nombre croissant d'entre elles. La chimie, la biologie, l'économie ne peuvent plus se passer de mathématiques élaborées. Les élèves polytechnicien sont reconnus, en France comme à l'étranger, pour la solidité et la largeur du spectre de leurs connaissances mathématiques.

Les cours proposés dans le programme d'approfondissement de Mathématiques couvrent des domaines divers de l'analyse, de l'algèbre et de la géométrie. Avec leur mélange de théories fondamentales et d'applications d'une grande actualité, ils constituent un cursus qui sera apprécié à la fois par ceux qui souhaitent une formation par la recherche au plus haut niveau, et par ceux qui veulent poursuivre une formation d'ingénieur dans le cadre d'une École en convention avec l'École polytechnique. Elle est indispensable à ceux qui envisagent une carrière de recherche à fort contenu mathématique.

Les sujets des cours ont été choisis à la fois pour leur importance théorique, leur beauté et pour leur ouverture aux applications.

Règles de choix et de validation

Le Programme d'Approfondissement se compose de trois périodes :

- Période 1 (septembre-décembre) : enseignements fondamentaux (5 ECTS/module)
- Période 2 (janvier-mars) : enseignements fondamentaux (5 ECTS/module)
- Période 3 (avril-juillet) : stage de recherche (20 ECTS)

Pour les périodes 1 et 2, les élèves doivent choisir au minimum 3 modules parmi ceux proposés. S'y ajoutent pour chacune des périodes, un module d'approfondissement consistant en un travail personnel en relation avec l'un des cours suivis, effectué sous la direction de l'enseignant concerné.

Certains modules sont proposés en collaboration avec d'autres départements :

- Informatique : *Théorie algébrique des nombres, Introduction à la géométrie algébrique, et Topologie algébrique.*
- Physique : *Équations des ondes et relativité générale, Groupes de symétrie en physique subatomique.*
- Mathématiques Appliquées : *Transport et diffusion.*

La filière d'excellence « voie Hadamard » de l'Université de Paris-Saclay (site de l'École polytechnique)

Les étudiants non polytechniciens qui souhaitent obtenir un Master 1 de l'université de Paris-Saclay ont la possibilité de demander leur inscription dans une filière d'excellence : la « voie Hadamard ». Il s'agit d'une filière sélective pour laquelle l'inscription est soumise à approbation après examen préliminaire d'un dossier de candidature. Les exigences pédagogiques se situent entre celles d'un master 1 traditionnel et le Parcours d'Approfondissement décrit dans ce document. Pour les modalités de cette filière d'excellence en Master 1, voir la page web du département de mathématiques de l'École polytechnique :
http://www.mathematiques.polytechnique.edu
(rubrique Enseignement/Master 1).

Compatibilité avec les autres Parcours d'approfondissement du M1 de l'École polytechnique.

Le cas des élèves inscrits au Programme d'approfondissement de Mathématiques et désirant choisir un module dans une autre discipline pourra être examiné.

Informatique

En collaboration avec le département d'Informatique, le département de Mathématiques propose dans son programme d'approfondissement/Master 1 un parcours mathématiques et informatique, destinés aux étudiants désirant se spécialiser dans les domaines de l'informatique fondamentale et de la cryptographie. Les modules de mathématiques *Théorie algébrique des nombres*, *Groupes, anneaux, modules et représentations*, *Introduction à la géométrie algébrique et courbes elliptiques, Topologie algébrique, Groupes compacts et groupes de Lie* et les modules d'informatique *Algorithmique avancée*, *Computational logic, Constraint-based Modeling and Algorithms for Decision-making, Introduction to Cryptology, Topological Data Analysis, Théorie de l'information, Randomization in Computer Science, Advanced Cryptology* font partie de ce parcours. Les enseignements d'approfondissement (EA) peuvent s'effectuer soit en relation avec l'un des cours de mathématiques suivi (MAT570), soit selon les modalités définies par le département d'informatique (INF571).

Mathématiques appliquées

Un élève s'inscrivant au Programme d'approfondissement de Mathématiques pourra choisir un des modules parmi ceux offerts par le Département de Mathématiques appliquées et réciproquement, un élève s'inscrivant au Programme d'approfondissement de Mathématiques appliquées pourra choisir un des modules parmi ceux proposés ci-dessus. Le module *Transport et Diffusion* est commun avec le PA de Mathématiques Appliquées.

Physique

Les modules *Groupes de symétrie en physique subatomique* et *Équation des ondes et relativité générale* sont communs avec le Programme d'Approfondissement de Physique.

Les élèves souhaitant suivre un cours dans un autre département pourront le faire avec l'accord des responsables concernés.

Offre de première période – P1

MAT551	Systèmes dynamiques	David Burguet	Cours
MAT552	Théorie algébrique des nombres	Gaëtan Chenevier	Cours
MAT553	Variétés, fibrés vectoriels et formes différentielles	Sébastien Boucksom	Cours
MAT554	Equation d'évolution	Mattthieu Léautaud	Cours
MAT556	Groupes, anneaux, modules et représentations	David Renard	Cours
MAT557	Topologie algébrique	Grégory Ginot	Cours

Offre de deuxième période – P2

MAT561	Théorie spectrale et mécanique quantique	Mathieu Lewin	Cours
MAT562	Introduction à la géométrie algébrique et courbes elliptiques	Benjamin Schraen	Cours
MAT563	Groupes compacts et groupes de Lie	Benoît Stroh	Cours
MAT565	Surfaces de Riemann	Carlos Matheus Silva Santos	Cours
MAP/ MAT567	Transport et diffusion	Grégoire Allaire François Golse	Cours
MAT568	Relativité générale	Cécile Huneau	Cours

Enseignements d'approfondissement

Un enseignement d'approfondissement correspond soit à un travail personnel (en général la lecture d'un article scientifique) en liaison avec l'un des cours suivis pendant le trimestre soit la validation du module MAT/PHY575.

1re période :
MAT570 : (D. Burguet, G. Chenevier, S. Boucksom, M. Léautaud, D. Renard, G. Ginot) en relation avec un des cours suivis et sous la direction de l'enseignant concerné, l'élève effectue un travail personnel donnant lieu à la rédaction d'un mémoire et à une soutenance orale.

MAT/PHY575 : (B. Rémy et S. Munier) **Groupes de symétrie en physique subatomique**. Des séances animées par les enseignants mathématiciens et physiciens exposent les principes théoriques de base. Les élèves effectuent parallèlement un travail personnel donnant lieu à la rédaction d'un mémoire et à une soutenance orale.

2e période :
MAT580 (M. Lewin, B. Schraen, B. Stroh, C.M. Silva Santos, F. Golse, C. Huneau) : Même modalités que les EA de la 1re période.

PHY568 EA : Les élèves suivant le cours de Relativité Générale (MAT568) ont la possibilité de choisir comme EA le cours de physique (PHY568) qui se déroule en parallèle. L'évaluation consistera en un travail personnel autour d'un texte scientifique faisant l'objet d'une soutenance orale. Réciproquement, les élèves du PA de Physique suivant le cours de PHY568 peuvent choisir comme EA le cours de MAT568.

Projet d'approfondissement

Le projet d'approfondissement est validé grâce aux deux EA suivis dans chaque période. Cependant, les élèves qui le souhaitent peuvent effectuer un projet sur toute l'année à la place des EA.

Pré-requis :

Il est fortement conseillé d'avoir validé au moins deux modules de mathématiques en 2A pour suivre le PA de mathématiques.

En outre, certains cours ont des pré-requis spécifiques :
- MAT431 fortement conseillé pour MAT551, MAT553, MAT562, MAT563, MAT565, MAT567, MAT568
- MAT432 fortement conseillé pour MAT554, MAT561, MAT567
- MAT451 fortement conseillé pour MAT552, MAT553, MAT556, MAT562, MAT563
- MAT452 fortement conseillé pour MAT551, MAT561
- 1 des 4 cours suivants MAP411, MAP431, MAT431 ou MAT432 fortement conseillé pour MAT/MAP567

Offre de troisième période – P3 (Stage de recherche)

Le stage de recherche s'effectue sur une période de 3 à 5 mois débutant début avril. Il s'effectue dans un laboratoire universitaire ou d'institut de recherche, en France ou à l'étranger. Il donne lieu à la rédaction d'un mémoire et à une soutenance.

MAT591	Groupes et représentations	David Renard	Stage
MAT592	Analyse et applications	François Golse	Stage
MAT593	Géométrie et Systèmes dynamiques	Sébastien Boucksom	Stage
MAT594	Théorie des nombres et géométrie algébrique	Gaëtan Chenevier	Stage

Débouchés

Parcours MAT

Ce programme s'adresse aux élèves souhaitant une formation avancée en mathématiques pour la poursuite de leur cursus scientifique. Cette formation est un pré-requis pour suivre une formation de Master 2 en Mathématiques fondamentale.

En France :
Le département de Mathématiques propose deux parcours dans la mention Mathématiques et Applications de l'université Paris-Saclay.

- AAG
  « Analyse, Arithmétique et Géométrie »
- AMS
  « Analyse, Modélisation et Simulation »

A l'étranger :
MPhil, DPhil, PhD Mathematics

Parcours MAT-INFO

En France :

- **Master Parisien de Recherche en Informatique (MPRI)**, co-habilité École polytechnique
  (Parcours Transverse, MAT-INFO, Algorithmique efficace, Conception des Systèmes Informatiques)
- **Master Parisien de Recherche Operationnelle (MPRO)**, co-habilité École polytechnique
  (Parcours MAP-INFO Optimisation, Algorithmique efficace)
- **Master Mathématiques/Vision/Apprentissage**, co-habilité École polytechnique
  (Parcours MAP-INFO « Image-Vision-Apprentissage », Algorithmique efficace)
- **Master Conception et Management des Systèmes Informatiques Complexes (COMASIC)**, co-habilité École polytechnique
  (Parcours Conception des Systèmes Informatiques, Transverse)
- **Master Logique Mathématique et Fondements de l'Informatique (LMFI)**, Paris 7
  (Parcours MAT-INFO, Transverse)
- **Master Mathématique et Informatique appliqués à la Cryptologie (MIC)**, Paris 7
  (Parcours MAT-INFO, Transverse)
- Autres Master 2, spécialité Informatique.

A l'étranger :
Tous les M.Sc. en Computer Science, Computer Engineering, Computing, Systèmes de communication…

Par exemple à ETH Zürich, EPF Lausanne, TU Karlsruhe, UPC Barcelona, Technion, RWTH Aachen, TU Delft, Oxford, Imperial College, Berkeley, MIT, Stanford, University of Michigan at Ann Harbor, University of Washington at Seattle, Carnegie Mellon University, Cornell University

Quelques exemples plus précis

- **Parcours MAT-INFO et Transverse :**
  M.Sc. Mathematics & the Foundations of Computer Science (MFoCS) Oxford University
  M.Sc. Computational Logic, Université de Dresde
- **Thématique Algorithmique efficace :**
  Master of Science in Computation for Design and Optimization, ou Electrical Engineering and Computer Science, pour prendre l'exemple des intitulés du MIT.

PROGRAMMES DES MODULES

Bathsheba Grossman

SYSTÈMES DYNAMIQUES
MAT551

David Burguet

Les systèmes dynamiques occupent une place déterminante dans les mathématiques comme dans leurs applications : « il est important de résoudre les équations différentielles » selon la devise secrète de Newton. C'était vrai à la fondation de la mécanique céleste et de la physique moderne, c'est encore le cas aujourd'hui avec l'utilisation de modèles dont l'analyse relève souvent de la théorie des systèmes dynamiques (évolution d'une population, états d'un cristal…).

Si l'analyse fonctionnelle et l'analyse numérique étudient l'existence, l'unicité et les procédés d'approximation des solutions de tels modèles, la théorie des systèmes dynamiques cherche à en établir les propriétés à long terme (par exemple : prévisibilité statistique à long terme malgré l'imprévisibilité à moyen terme).

De façon moins évidente pour le néophyte, les systèmes dynamiques apparaissent également en mathématiques pures. Certains problèmes de géométrie et de théorie des nombres se traduisent ainsi élégamment et fructueusement en questions de dynamique.

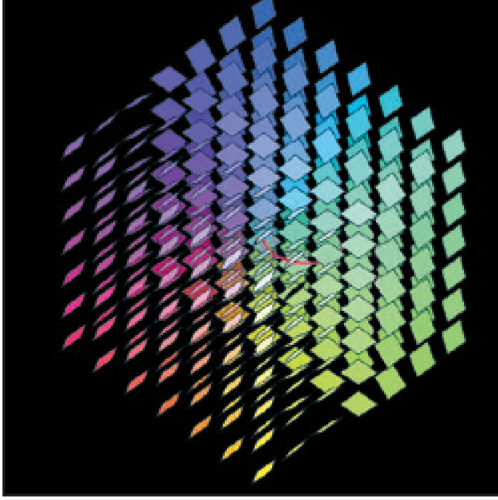
L'ambition de ce cours est de présenter les notions de bases de la théorie moderne des systèmes dynamiques en lien avec quelques questions de géométrie et de théorie des nombres.

Programme

Théorie ergodique :
- théorème de récurrence de Poincaré ;
- notions d'irréductibilité: ergodicité, mélange, Bernoulli;
- théorèmes ergodiques en moyenne et ponctuel.
- Entropie mesurée ;

Dynamique topologique :
- théorème de récurrence de Birkhoff ;
- notions d'irréductibilité : transitivité, mélange, minimalité ;
- simplexe des mesures invariantes (unique ergodicité) ;
- entropie topologique.

Théorie des nombres :
- développement en base entière et en fraction continue ;
- équirépartition des valeurs de P(n), n décrivant les entiers et P un polynome non constant ayant un coefficient irrationnel ;
- principe de correspondance de Furstenberg et Théorème de Szemerédi.



Champ de plans non intégrable et courbe tangente à ce champ de plans.

Dynamique des homéomorphismes du cercle :

➤ nombre de rotation ;

➤ thèorème et contre-exemple de Denjoy.

Dynamique des automorphismes hyperboliques linéaires du tore :

➤ sous-décalages de type fini ;

➤ partitions de Markov ;

➤ entropie.

Niveau requis :
Les outils indispensables (en théorie de la mesure notamment) seront brièvement rappelés ou introduits. Une certaine familiarité avec les notions de base de la topologie sera un avantage.

Approfondissements

Ces approfondissements sont une occasion de compléter et d'enrichir le cours MAT551 « Introduction aux Systèmes dynamiques ». Les sujets seront choisis après discussion et donneront lieu à un bref cours introductif. Voici quelques sujets proposés ou traités les années précédentes :

1. Stabilité des dynamiques hyperboliques et exemples de systèmes robustement instables
2. Orbites homoclines et comportement chaotique en mécanique classique
3. Théorème de Furstenberg : preuve ergodique du théorème combinatoire de Szemerédi
4. Théorème KAM et diffusion d'Arnold : stabilité et instabilité dans les systèmes hamiltoniens
5. Actions de groupes sur le cercle
6. Comptage des géodésiques
7. Théorème de réalisation de Jewett-Krieger
8. Le Lemme de fermeture de Pugh
9. L'argument de Hopf

Toutes les propositions ayant un composant mathématique significatif, notamment en lien avec d'autres cours (par exemple : théorie du contrôle, probabilités, mécanique…), sont les bienvenues.

La structure de ces enseignement est souple, le travail personnel sur documents jouant un rôle prépondérant. L'évaluation portera sur la rédaction d'un mémoire détaillé et une soutenance orale permettant de faire la preuve de son esprit synthétique comme de sa capacité à répondre à des questions précises.

Bibliographie

Michael Brin and Garrett Stuck, (2002). Introduction to Dynamical Systems (2[nd] ed.). Cambridge University Press.

Fathi, A., Systèmes dynamiques, Cours de l'École polytechnique.

Shub, M., (1987). Stabilité globale des systèmes dynamiques, Astérisque, SMF.

Yves Coudène, (2013) Théorie ergodique et systèmes dynamiques, EDPSciences.

Anatole Katok and Boris Hasselblatt, (1997) Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems,Volume 54 de Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Éditeur Cambridge University Press.

Ricardo Mané, (1987) Ergodic Theory and Differentiable Dynamics (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge/A Series of Modern Surveys in Mathematics) Softcover reprint of the original 1[st] ed.

THÉORIE ALGÉBRIQUE DES NOMBRES
MAT552

Gaëtan Chenevier

La théorie algébrique des nombres est l'étude des propriétés arithmétiques des nombres algébriques. On s'intéresse notamment à la propriété de factorisation, unique des éléments comme produits d'éléments premiers, dans les anneaux de la forme $\mathbb{Z}[x]$ où x est un « entier algébrique », (l'anneau des entiers de Gauss par exemple), ou mieux, dans l'anneau de tous les entiers algébriques d'un corps de nombres donné. Cette propriété a joué historiquement un rôle important dans l'étude des équations diophantiennes, par exemple dans le fameux travail de Kummer sur le « dernier théorème » de Fermat.

Elle intervient aussi dans de nombreuses autres questions en apparence éloignées, comme la théorie entière des formes quadratiques, la réduction des endomorphismes à coefficients entiers, ou la théorie de la multiplication complexe… Il se trouve que la propriété de factorisation unique ne persiste en général qu'au sens des idéaux (Kummer, Dedekind), et que son défaut peut être mesuré par un groupe abélien fini « le groupe des classes d'idéaux » dont les mystères sont encore au coeur de l'arithmétique moderne.

Le cas des « entiers quadratiques », c'est à dire des anneaux de la forme de $\mathbb{Z}[x]$ avec x de degré 2, est historiquement le plus important et sera étudié en détail. Nous verrons que leur arithmétique est reliée à la classification des formes quadratiques binaires entières (Lagrange, Legendre, Gauss) et à la question élémentaire de décider quels sont les entiers représentés par une forme donnée.

Par exemples, nous savons depuis Fermat que tout nombre premier p congru à 1 modulo 4 est somme de deux carrés, ou encore que si p est congru à 1, 3, 7 ou 9 modulo 20 alors p est (exclusivement) soit de la forme $x^2 + 5\,y^2$, soit de la forme $2x^2 + 2xy + 3y^2$ (Euler, Lagrange). Nous développerons au long du cours des outils efficaces pour étudier ce type de question, comme la réduction de Gauss, ou la notion de « genre » des formes quadratiques (Lagrange, Gauss), qui est un point de départ de la fameuse théorie du corps de classes.

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}$$

Loi de réciprocité quadratique de Gauss

Quelques notions abordées : loi de réciprocité quadratique, géométrie des nombres de Minkowski, formes quadratiques binaires, arithmétique des anneaux, corps de nombres, entiers algébriques, anneau de Dedekind, groupe des classes d'idéaux, fonctions L, formules du nombre de classes et du nombre de genre.

Bibliographie

K. Ireland and M. Rosen, Springer, « A Classical Introduction to Modern Number Theory », GTM 84.

P. Samuel, Hermann, « Théorie algebrique des nombres ».

C. F. Gauss, « Disquisitiones arithmeticae ».

VARIÉTÉS, FIBRÉS VECTORIELS ET FORMES DIFFÉRENTIELLES

MAT553

Sébastien Boucksom

Les variétés différentielles sont des objets géométriques localement paramétrés par des systèmes de coordonnées, mais possédant une forme globale (c'est-à-dire une topologie) qui peut être très complexe. Elles sont de ce fait le langage naturel de la géométrie différentielle (riemannienne, symplectique, complexe, etc.), mais aussi de nombreuses théories physiques (relativité générale, théorie de jauge, etc.).

Ce cours a pour objectif de proposer une introduction aux variétés et à quelques-uns des concepts-clés qui leur sont associés : fibrés vectoriels, formes différentielles, et cohomologie de Rham.

Il est aussi l'occasion de se familiariser au passage avec quelques outils d'un usage récurrent en mathématiques: topologie des espaces localement compacts, actions de groupes topologiques, produit tensoriel et algèbre extérieure, et quelques bases d'algèbre homologique.

Étant par définition localement modelées sur des espaces vectoriels, les variétés donnent lieu à un élégant formalisme de calcul différentiel, qui permet d'étudier les applications entre variétés en les linéarisant. Ceci nous mènera au célèbre théorème de plongement de Whitney, impliquant que les variétés « abstraites » ne sont pas plus générales que la notion plus familière de sous-variété (*i.e.* d'un espace euclidien).

Il peut être plus surprenant de prime abord que les variétés soient également le cadre naturel d'une riche théorie de l'intégration, où l'on intègre des éléments infinitésimaux de longueur, aire, volume, etc. incarnés par la notion de forme différentielle. Le formalisme associé est ici encore d'une magnifique concision, résumant par exemple d'un seul trait les opérateurs gradient, divergence et rotationnel de la mécanique des fluides et de l'électromagnétisme, et les formules d'intégration par parties qui les accompagnent.

La construction des formes différentielles s'appuie sur le concept tout aussi fructueux de fibré vectoriel, au cœur par exemple de la théorie de jauge. On en posera les bases, ce qui revient à faire de l'algèbre (multi)linéaire sur une famille lisse d'espaces vectoriels.

Enfin, on introduira quelques rudiments de cohomologie de de Rham, qui encode

The Waterfall par M.C. Escher

via une machinerie relevant de l'algèbre (linéaire) homologique l'idée que les « trous » d'un espace peuvent être détectés en intégrant autour, et offre un premier contact avec la topologie algébrique.

Niveau requis
Une familiarité avec la première partie du cours MAT431 (sous-variétés d'un espace euclidien), si elle n'est pas absolument indispensable, est toutefois vivement recommandée.

Bibliographie

Lee, Introduction to smooth manifolds.

Milnor, Topology from the differentiable viewpoint.

Bott et Tu, Differential forms in algebraic topology.

EQUATION D'ÉVOLUTION
MAT554

Matthieu Léautaud

Ce cours est une introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles d'évolution. Ces dernières modélisent des systèmes non-stationnaires issus par exemple de la physique (mécanique des fluides, mécanique quantique, électromagnétisme, relativité…) ou de la biologie (réaction-diffusion…).

Ces équations décrivent l'évolution temporelle de quantités (vitesse, pression, fonction d'onde, concentration…) dépendantes d'une variable spatiale. La première question mathématique sous-jacente est celle du caractère bien posé : une configuration initiale fixée donne t-elle lieu à une solution de l'équation ? Si oui dans quel espace de fonctions ? Et quel sens donner à une telle solution ? Cette solution est-elle unique ? Existe t-elle pour tout temps, ou cesse t-elle d'exister en temps fini ?

Nous présenterons de manière auto contenue quelques résultats fondamentaux de la théorie des équations d'évolution. Concernant les équations linéaires autonomes, nous étudierons la théorie des semigroupes sur les espaces de Banach, qui fournit un cadre abstrait très général répondant aux questions ci-dessus. Nous expliquerons comment les équations de la chaleur, des ondes, de Schrödinger linéaires entrent dans ce cadre. Pour ce faire, nous aurons besoin à la fois de décrire des résultats abstraits d'analyse fonctionnelle et des espaces de fonctions adaptés à l'étude de nombreuses EDP (les espaces de Sobolev). Enfin, nous décrirons quelques problèmes d'évolution semi-linéaires, et la stratégie qui permet de les résoudre. Pour certaines équations de la chaleur et de Schrödinger non-linéaires, nous montrerons des résultats d'existence locale, d'existence globale. Nous finirons par décrire quelques phénomènes d'explosion en temps fini.

Voici un plan indicatif du cours :

Chapitre 1. Opérateurs linéaires

Chapitre 2. Espaces de fonctions (Espaces de Lebesgue et de Sobolev)

Chapitre 3. Théorie des semi-groupes

Chapitre 4. EDP d'évolution linéaires

Chapitre 5. Équations semi-linéaire.

Niveau requis

Le seul prérequis est le cours de tronc commun, en particulier l'analyse Hilbertienne et la transformation de Fourier.

Tourbillons vus par Hiroshige.

Approfondissements

Les techniques introduites dans ce cours sont centrales dans l'étude de nombreux problèmes de physique mathématique au cœur d'un domaine de recherche très actif. Voici quelques exemples d'EA qui pourront être proposés :

- Inégalités de Strichartz et équation des ondes semi-linéaires.
- Dispersion et équation de Schrödinger non-linéaire.
- Solutions de Leray des équations de Navier-Stokes.
- Le théorème de Fujita-Kato pour les équations de Navier-Stokes.

Bibliographie

Lawrence C. Evans, Partial Differential Equations. Graduate studies in Mathematics. AMS.

Thierry Cazenave and Alain Haraux, Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires. Ellipse.

H. Brezis, Analyse fonctionnelle. Théorie et applications, Masson.

GROUPES, ANNEAUX, MODULES ET REPRÉSENTATIONS
MAT556

David Renard

Ce cours introduit des notions fondamentales d'algèbre. Une première partie est consacrée aux groupes finis et à leurs représentations linéaires (sur le corps des complexes). On y démontre les résultats principaux du sujet :
lemme de Schur, théorème de Maschke, théorème de Peter-Weyl, formule de Plancherel, orthogonalité des caractères… Le point de vue adopté est l'utilisation de la convolution et de la transformation de Fourier.

Dans une seconde partie, on s'intéresse aux anneaux A (non nécessairement commutatifs) et aux modules sur ces anneaux. Nous développons sous certaines hypothèses de finitude, quelques méthodes de classification (suites de composition, étude des extensions, etc). Nous considérons le cas où A est principal et nous en déduisons, par exemple, la classification des groupes abéliens de type fini ou des classes de conjugaison de $GL(n,k)$.

Dans une troisième et dernière partie, nous étudions les algèbres semi-simples et leur représentations, puis nous appliquons ceci à la théorie des représentations linéaires des groupes finis, mais cette fois sur un corps quelconque, ce qui généralise les résultats de la première partie.

Nous essayons au fil de ce cours d'introduire progressivement et sans formalisme excessif le langage, les concepts et les outils de la théorie des catégories, devenus indispensables à toute présentation avancée de nombreux domaines des mathématiques. La théorie des représentations se prête remarquablement à cette première approche.

Plan du cours

I. Groupes et représentations
- I.1. Groupes et actions de groupes. Vocabulaire.
- I.2. Représentations linéaires des groupes finis : exemples, opérations sur les représentations, lemme de Schur, théorème de Maschke.
- I.3. Algèbre de convolution. Transformation de Fourier. Théorème de Peter-Weyl. Formule de Plancherel.
- I.4. Fonctions centrales et caractères.
- I.5. Représentations induites.

Boîte en laque à symétrie S_3
(Chine, 16e siècle, musée de Münster).

II. Anneaux et modules.

- II.1. Anneaux, idéaux, modules : exemples, vocabulaire de base.
- II.2. Opérations sur les modules. Atomisation et reconstruction. Suites de Jordan-Hölder.
- II.3. Modules sur un anneau principal. Théorème de structure et applications (classification des groupes abéliens de type fini, classes de conjugaison de GL(n,k), etc.)

III. Anneaux et algèbres semi-simples.

- III.1. Anneaux semi-simples. Idempotents.
- III.2. Algèbres semi-simple et applications à la théorie des représentations des groupes.

Niveau requis
Il est conseillé d'avoir manipulé les objets algébriques de base (algèbre linéaire, groupes, anneaux, corps, notion de quotient) et, notamment, d'avoir validé le cours MAT451 (Algèbre et théorie de Galois).

Approfondissements

Des approfondissements seront proposés. Leur structure sera souple, le travail personnel sur documents jouera un rôle prépondérant. Ils conduiront à la rédaction d'un mémoire et à une soutenance orale.

- ➤ Dualité de Tannaka pour les groupes finis.
- ➤ Représentations des groupes symétriques.
- ➤ Représentations des groupes linéaires sur les corps finis.
- ➤ Etude des sous-groupes finis des groupes linéaires.
- ➤ Algèbres de Hopf et groupes quantiques.
- ➤ Cohomologie des groupes.

TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE
MAT557

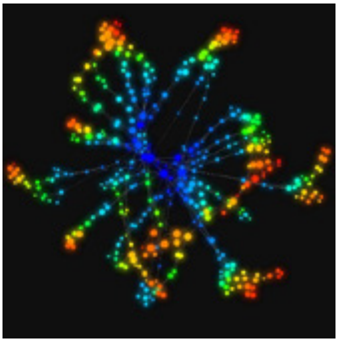
Grégory Ginot

Ce cours est une introduction à la topologie algébrique, et est destiné aux élèves du PA de mathématiques, ainsi qu'aux élèves des PA de MAP et INFO intéressés par les DataScience, ou l'informatique théorique, et qui souhaitent acquérir un bagage mathématique fort. Ce cours est une bonne préparation (sans être un prérequis) au cours INF556 (Topological Data Analysis), les outils introduits ayant trouvé des applications récents à l'étude des nuages de points.

Le cours se concentrera principalement sur l'étude des invariants des espaces topologiques en particulier l'homologie. Après quelques rappels de topologie générale (dont l'équivalence d'homotopie), on introduit l'homologie et la cohomologie simpliciales et singulières ainsi que leurs principales propriétés. On définira également le groupe fondamental d'un espace topologique.

Puis nous donnerons des idées générales d'algèbre homologique offrant des applications différentes de la partie principale du cours, en particulier la (co)homologie des groupes.

Tout au long du cours nous introduirons des idées et notions de la théorie des catégories.



Visualisation de la topologie d'un jeu de donnée grâce à l'algorithme Mapper

Bibliographie

Glenn Bredon, (1997). Topology and Geometry, Graduate Texts in Mathematics, 139. Springer-Verlag, New York.

Allen Hatcher, (2002). Algebraic topology, Cambridge University Press, Cambridge.

Chuck Weibel, An introduction to homological algebra, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38.

Cambridge University Press, (1994). Cambridge.

GROUPES DE SYMÉTRIE EN PHYSIQUE SUBATOMIQUE
MAT575/PHY575

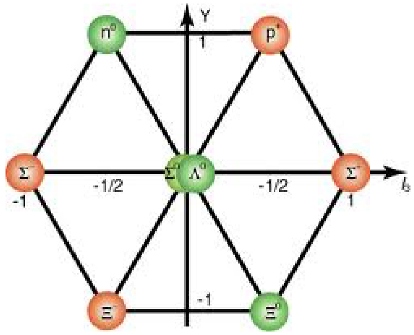
Bertrand Rémy et Stéphane Munier

La mécanique quantique a conduit à l'émergence de nouveaux concepts de divers domaines mathématiques (en analyse : espaces de Hilbert formalisés par von Neumann ; en algèbre : théorie des représentations suivant Cartan et Weyl). En retour, ces concepts ont permis de meilleures formalisations en physique fondamentale, ainsi que des découvertes importantes, comme par exemple le modèle standard des particules élémentaires (Glashow, Weinberg, Salam). Pour cet EA, les mathématiques considérées relèveront de la théorie des groupes et la physique visée sera essentiellement celle de l'infiniment petit.

En physique, que se soit au niveau classique ou quantique, l'analyse des symétries d'un système permet de simplifier son étude car celles-ci impliquent en général l'existence de quantités conservées, de règles de sélection, etc.

Les groupes de symétrie en jeu font partie des outils quotidiens de nombreux domaines de la physique fondamentale. Certaines subtilités mathématiques de théorie abstraite des groupes s'incarnent de façon frappante en physique : par exemple, la différence entre les groupes $SU(2)$ et $SO(3)$ correspond à l'existence de particules de spin demi-entier, objets qui n'ont pas d'interprétation classique. Des extensions de groupes orthogonaux, les groupes de Lorentz et de Poincaré, s'interprètent comme groupes de symétrie des systèmes physiques relativistes. Il se trouve que les groupes unitaires, $SU(2)$ ainsi que $U(1)$ et $SU(3)$, apparaissent aussi comme des groupes de symétrie « interne » des particules élémentaires : cette découverte a conduit à la formulation du modèle standard de la physique des particules mentionné ci-dessus. Cette théorie classifie les briques élémentaires de la matière et décrit leurs interactions, et ses nombreuses prédictions ont passé tous les tests expérimentaux jusqu'à ce jour.

La notion mathématique de représentation linéaire d'un groupe est centrale en mécanique quantique, et est une belle illustration de l'interaction entre mathématique et physique qu'on se propose de présenter : c'est une notion qui pré-existait à la mécanique quantique, mais les directions dans lesquelles elle s'est développée ont parfois été très fortement détermi-



« Voie octuple » de Gell-Mann : le diagramme des poids de la représentation adjointe du groupe SU(3) permet de classifier des particules subatomiques sensibles à l'interaction forte (ici, des particules de la famille des baryons, dont le proton et le neutron).

nées par des considérations physiques (E. Wigner). C'est dans cet esprit que seront présentés les rudiments de cette théorie (diagrammes de poids, caractère de représentations, tableaux et diagrammes de Young).

Les séances sont animées alternativement par un enseignant mathématicien et un enseignant physicien.

En parallèle à l'enseignement, les élèves préparent un projet bibliographique sur un sujet de leur choix, donnant lieu à la rédaction d'un mémoire et à une soutenance orale en fin de période.

THÉORIE SPECTRALE ET MÉCANIQUE QUANTIQUE MAT561

Mathieu Lewin

La théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints en dimension infinie est étonnamment plus subtile que celle des matrices hermitiennes en dimension finie. Pourtant, de nombreux problèmes physiques ou mécaniques se ramènent à la résolution d'un problème aux valeurs propres dont l'inconnue est une fonction, ou à une équation aux dérivées partielles linéaire qui peut être étudiée avec des méthodes spectrales.

Développée par Hilbert à la fin du 19e siècle, la théorie spectrale a connu une envolée après la construction de la mécanique quantique et de l'équation de Schrödinger dans les années 1920-30, avec en particulier les travaux de Stone et de Von Neumann.

Dans ce cours, nous verrons les bases de la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints en dimension infinie, et nous donnerons quelques applications choisies à la mécanique quantique, avec une attention particulière aux opérateurs décrivant les atomes et les molécules.

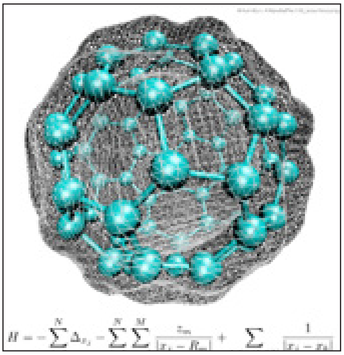
Contenu du cours :

- Auto-adjonction, exemples et contre-exemples.
- Spectre.
- Théorie de Rellich-Kato et de Weyl.
- Formes quadratiques, théorèmes de Lax-Milgram et Riesz-Friedrichs.
- Théorème spectral et calcul fonctionnel
- Équation de Schrödinger.
- Opérateurs de Schrödinger pour une particule, oscillateur harmonique, atome d'hydrogène.
- Propriétés spectrales des opérateurs décrivant plusieurs particules, atomes et molécules.

Approfondissements

En relation avec le cours de MAT561 et sous la direction de l'enseignant, l'élève effectue un travail personnel donnant lieu à la rédaction d'un mémoire et à une soutenance orale.

Simulation de la molécule C60 dans son état fondamental à partir de la théorie de la fonctionnelle de la densité, une technique qui approche l'équation de Schrödinger



Niveau requis

- Éléments d'analyse de Fourier et de la théorie des distributions.
- Des connaissances préalables en mécanique quantique pourront aider, mais ne sont pas nécessaires pour suivre le cours.

Bibliographie

Polycopié en français distributé aux élèves

B. Davies, (1995). *Spectral theory and differential operators*, Cambridge Univ. Press.

M. Reed, B. Simon, (1978). Methods of Modern Mathematical Physics. IV. Analysis of operators, Academic Press.

E.H. Lieb, R. Seiringer, (2010). *The Stability of Matter in Quantum Mechanics*, Cambridge Univ. Press.

INTRODUCTION À LA GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE et courbes elliptiques MAT562

Benjamin Schraen

Ce cours est une introduction à la géométrie algébrique et à la géométrie arithmétique à travers l'exemple des courbes elliptiques, c'est-à-dire des courbes projectives planes non singulières définies par une équation de degré 3. Une propriété remarquable de ces courbes elliptiques est que leurs ensembles de points peuvent être munis d'une loi de groupe.

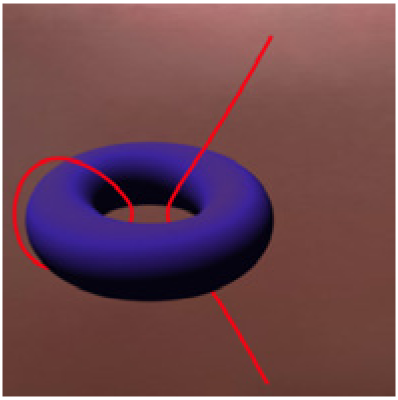
La première partie du cours sera consacrée à la présentation du language des variétés algébriques, plus précisément au théorème des zéros de Hilbert et à la géométrie projective. Quelques exemples du théorème d'intersection de Bezout seront étudiés.

La seconde partie sera consacrée aux propriétés des courbes algébriques planes et plus particulièrement des courbes elliptiques. Les propriétés des courbes elliptiques seront étudiées sur différents corps : sur les corps finis, avec le théorème de Hasse qui donne une estimation du nombre de points de ces courbes elliptiques, et sur le corps des nombres rationnels, avec le célèbre théorème de Mordell. L'étude des courbes elliptiques sur les corps finis sera illustrée de quelques applications, à la cryptographie et aux algorithmes de factorisation. Dans le cas du corps des nombres rationnels, quelques exemples concrets où le groupe des points rationnels est déterminable seront étudiés.

Le cas des courbes elliptiques sur les nombres complexes sera mentionné mais ne donnera pas lieu à une étude approfondie.

Niveau requis
Il est fortement conseillé d'avoir manipulé les objets algébriques de base (algèbre linéaire, groupes, anneaux, corps, notion de quotient) et, notamment, d'avoir validé le cours MAT 451 (Algèbre et théorie de Galois).

Courbe elliptique



Bibliographie

J. H. Silverman, (1986). Arithmetic of elliptic curves. Graduate Texts in Mathematics, 106. Springer-Verlag, New York.

L. C. Washington, (2008). Elliptic curves, Number theory and cryptography. Second edition. Discrete Mathematics and its Applications, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.

M. Hindry, (2008). Arithmétique, Calvage & Mounet, Cambridge University Press.

J. H. Silverman, J. Tate, (1992). Rational points on elliptic curves, Springer-Verlag, New York.

MASTER 1

GROUPES COMPACTS ET GROUPES DE LIE
MAT563

Benoît Stroh

Ce cours constitue la suite du cours de David Renard « Groupes, anneaux, modules et représentations » MAT556, mais en se plaçant dans une optique plus géométrique et analytique qu'algébrique.

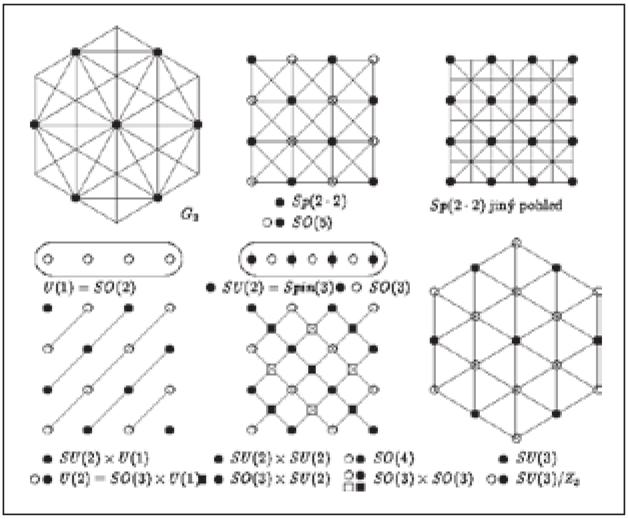
L'étude des groupes de matrices compacts permet à la fois d'illustrer la théorie générale mais également de la raffiner en obtenant une classification complète des représentations irréductibles. Cette théorie est centrale aussi bien en arithmétique (via les représentations automorphes et le programme de Langlands) qu'en physique. La connaissance du cours MAT556 paraît indispensable, et celle de MAT553 pourra être utile.

Nous commencerons par étudier la théorie générale des représentations des groupes compacts. Une fois acquise l'existence de la mesure de Haar, cette théorie est complètement parallèle à celle des représentations des groupes finis abordées dans le cours MAT556. En effet, la mesure permet de moyenner des fonctions sur le groupe, phénomène à l'origine de toutes les propriétés agréables des représentations des groupes compacts.

Toutefois, on peut dans certains cas aller beaucoup plus loin et obtenir une classification précise des représentations irréductibles. Nous donnerons l'exemple des deux groupes compacts non abéliens les plus simples, $SU_2(\mathbb{C})$ et $SO_3(\mathbb{R})$, qui sont presque les mêmes. Nous donnerons des applications à la théorie des représentations des groupes non compacts $SL_2(\mathbb{R})$ et $SL_2(\mathbb{C})$.

Nous aborderons ensuite la théorie des groupes et des algèbres de Lie comme outil pour la théorie des représentations. Un groupe de Lie n'est autre qu'un groupe de matrices, et son algèbre de Lie est son plan tangent en l'origine. Les algèbres de Lie capturent donc des phénomènes au premier ordre. Permettant de linéariser la théorie des groupes, elles sont omniprésentes en mathématiques et en physique.

Nous introduirons surtout du vocabulaire nécessaire pour la suite : caractères et systèmes de racine.



Systèmes de Racines

Nous définirons enfin les groupes de Lie compacts, comme par exemple $SO_n(\mathbb{R})$ et $SU_n(\mathbb{C})$, et classifierons complètement leurs représentations irréductibles.

On terminera si le temps le permet par quelques indications sur la suite de la théorie dans le cas non compact (qui est beaucoup plus difficile et constitue un sujet de recherche toujours actuel).

Bibliographie

T. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Graduate Texts in Mathematics 98, Springer.

J. F. Dat, (2012). Cours introductif de M2 Groupes et Algèbres de Lie, note de cours sur internet.

A. Kirillov, An introduction to Lie groups and Lie Algebras, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 113.

E. Kowalski, Representation theory, note de cours sur internet.

F. Murnaghan, Representations of locally compact group, Fall 2013, notes de cours sur internet.

M. Sepanski, Compact Lie groups, Graduate Texts in Mathematics 235, Springer.

SURFACES DE RIEMANN
MAT565

Carlos Matheus Silva Santos

Les surfaces de Riemann sont les espaces sur lesquels on peut définir la notion de fonction holomorphe. Ces objets sont au carrefour de nombreux domaines des mathématiques : la géométrie différentielle (métrique hyperbolique), la théorie des nombres (formes modulaires), les systèmes dynamiques (espaces de Teichmüller), ou la géométrie algébrique (courbes projectives).

Le but de ce cours est de proposer une introduction à divers aspects géométriques des surfaces de Riemann. Nous introduirons aussi les deux notions clef de topologie algébrique que sont les revêtements et le groupe fondamental, et discuterons des applications de cette théorie à l'étude des surfaces de Riemann compactes.

Niveau requis
La connaissance de la notion de variété sera utile mais pas nécessaire. Tous les outils adéquats seront développés durant le cours.

Plan du cours
➤ Rappels sur les fonctions holomorphes ;
➤ Surfaces de Riemann : définition et exemples ;
➤ Théorie des revêtements : et correspondance de Galois ;
➤ Groupe fondamental ;
➤ Théorème de Van Kampen ;
➤ Topologie des surfaces de Riemann compactes.

Approfondissements

En relation avec le cours de MAT565 et sous la direction de l'enseignant, l'élève effectue un travail personnel donnant lieu à la rédaction d'un mémoire et à une soutenance orale.

Voici quelques thèmes qui pourront être abordés :
➤ Les surfaces modulaires.
➤ Le théorème d'uniformisation.
➤ Le théorème de Belyi.
➤ Les groupes d'automorphismes des surfaces de Riemann compactes.
➤ les revêtements cycliques à petits carreaux.
➤ La Jacobienne d'une surface de Riemann compacte.

Bernhard Riemann

Bibliographie

Allen Hatcher, Algebraic topology.

Eric Reyssat, Quelques aspects des surfaces de Riemann.

Un polycopié sera de plus distribué au début du cours.

TRANSPORT ET DIFFUSION
MAT567/MAP567

François Golse, Grégoire Allaire

Ce cours organisé conjointement par les départements de Mathématiques Appliquées et Mathématiques est aussi référencé MAP567.

Le but de ce cours est de présenter des modèles de transport et de diffusion de particules que l'on retrouve dans de nombreux domaines d'applications pertinents sur le plan énergétique. Par exemple, le mécanisme de réaction en chaîne dans les réacteurs nucléaires, l'effet de serre en climatologie, le transfert radiatif en thermique ou en astrophysique, certains modèles de dynamique des populations structurées en biologie relevant de cette thématique.

Après une présentation mathématique de ces modèles, on montrera que la diffusion est la limite du transport dans un régime fortement collisionnel, et on expliquera la notion de masse ou de taille critique. On introduira des méthodes de résolution numérique de type differences finies et Monte-Carlo.

Ce cours peut accepter un maximum de 60 élèves.

Niveau requis
Un des 4 cours suivants :

- **MAP411**
  Modélisation mathématique,
- **MAP431**
  Analyse numérique et optimisation,
- **MAT431**
  Calcul différentiel et fonctions holomorphes,
- **MAT432**
  Distributions, analyse de Fourier et EDP.

Approfondissements

Des approfondissements en liaison avec le module Transport et Diffusion seront proposés.

Leur structure sera souple, le travail personnel sur documents jouera un rôle prépondérant, éventuellement précédé de quelques cours d'introduction. Ils conduiront à la rédaction d'un mémoire et à une soutenance orale.

- Optimisation de formes et application à un problème de l'énergie nucléaire. Le but de ce projet est l'étude d'une méthode d'optimisation de formes pour un problème de rechargement du combustible dans un réacteur nucléaire. Il s'agit de positionner différents types de combustible nucléaire en

Assemblage combustible

quantité fixée pour optimiser le fonctionnement du réacteur. L'originalité de l'approche proposée ici est d'utiliser une méthode d'optimisation de formes basée sur la théorie de l'homogénéisation. Grosso modo, on suppose que les différents types de combustible peuvent se « mélanger » et on optimise leur proportion en tout point. Les calculs (en théorie de la diffusion) seront réalisés avec le logiciel FreeFem++.

➤ Homogénéisation d'un modèle de diffusion. Le but de ce projet est l'homogénéisation, c'est-à-dire la moyennisation, d'un modèle de diffusion dans un milieu périodique. On étudiera d'abord la stratégie de factorisation dans un milieu purement périodique (en 1-d avec Scilab, éventuellement en 2-d avec FreeFem++), puis on fera des expériences numériques sur le cas, beaucoup plus délicat, de la juxtaposition de deux milieux périodiques. Une application typique est le calcul de criticité d'un réacteur nucléaire.

Bibliographie

R. Dautray, (1989). Méthodes probabilistes pour les équations de la physique, Eyrolles, Paris

R. Dautray, J.-L. Lions, (1988). Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Masson, Paris.

B. Perthame, (2007). Transport equations in biology, Birkhäuser, Bâle.

J. Planchard, (1995). Méthodes mathématiques en neutronique, Collection de la Direction des Études et Recherches d'EDF, Eyrolles.

G. Pomraning, (1973). The equations of radiation hydrodynamics, Pergamon Press, Oxford, New York.

ÉQUATION DES ONDES ET RELATIVITÉ GÉNÉRALE
MAT568

Cécile Huneau

L'équation des ondes est présente dans la modélisation de nombreux systèmes physiques : cordes vibrantes, électromagnétisme… En relativité générale, l'équation des ondes peut être vue comme une première approximation des équations d'Einstein pour décrire la propagation des déformations de l'espace-temps.

Dans ce cours, nous commencerons par étudier l'équation des ondes dans le vide, puis dans un espace-temps courbe : nous verrons l'influence de la dimension et de la géométrie sur le comportement qualitatif des solutions. Quelques notions de géométrie lorentzienne et de relativité générale seront introduites, afin de prendre comme exemple une onde au voisinage d'un trou noir.

Nous nous intéresserons ensuite aux équations d'ondes non linéaires, qui sont un problème modèle pour les équations d'Einstein. Nous introduirons les outils nécessaires à l'étude du comportement en temps long des solutions, et verrons quelques idées sur la stabilité de l'espace-temps de Minkowski.

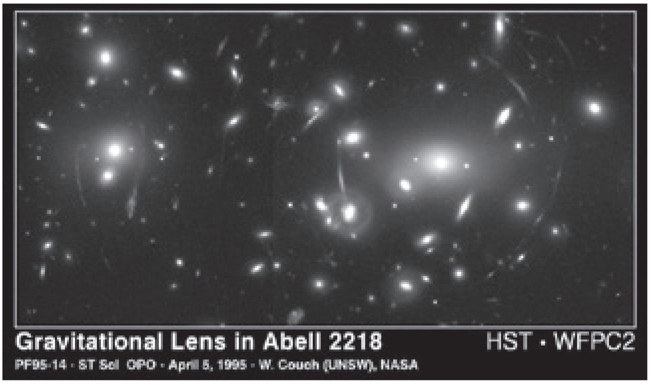
Cet enseignement a été conçu comme un enseignement intégré de mathématiques et de physique, ce qui signifie que les élèves sont encouragés à suivre en même temps le cours portant le même nom en physique, soit PHY568.

Approfondissements

PHY568 EA : Les élèves suivant le cours de Équation des ondes et relativité générale (MAT568) ont la possibilité de choisir comme EA le cours de physique (PHY568) qui se déroule en parallèle. L'évaluation consistera en un travail personnel autour d'un texte scientifique faisant l'objet d'une soutenance orale. Réciproquement, les élèves du PA de Physique suivant le cours de PHY568 peuvent choisir comme EA le cours de MAT568.

Exemples d'EA :

- Les trous noirs de Kerr et de Reissner Nordstrom.
- Les trous noirs colorés d'après Bizon, Smoller, Wasserman, Yau.
- Le problème de Cauchy en relativité générale, d'après Yvonne Choquet Bruhat.
- Les théorèmes de singularité de Hawking-Penrose.



Bibliographie

S. Aretakis, Dynamics of extremal black holes, Springer.

C. Sogge, Lectures on non-linear wave equations, Boston International Press.

R. Wald, General Relativity, The University of Chicago Press.

Département de Mathématiques
École polytechnique
91128 Palaiseau cedex
T. +33 (0)1 69 33 49 59 ou 49 99

Maquette-impression Centre Poly-*media*