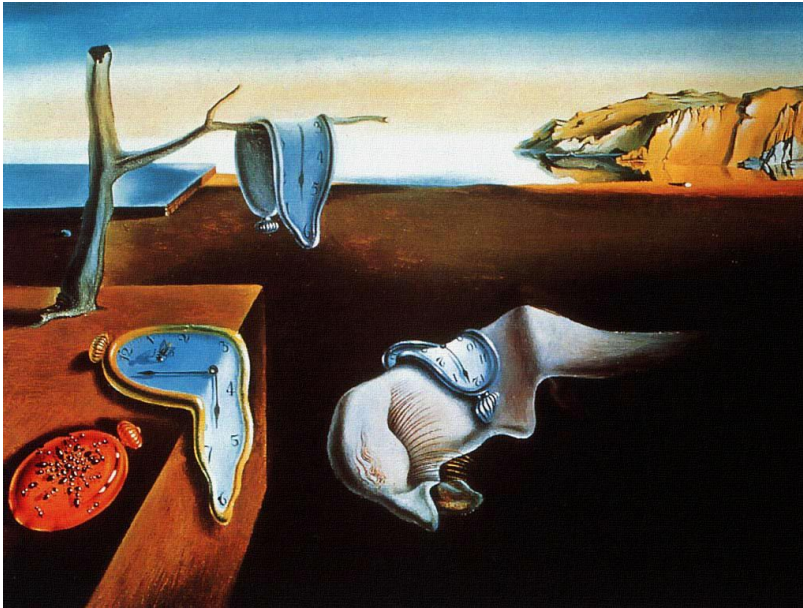


*P. Marios Petropoulos*

# Relativité Générale

La gravitation en une leçon et demie





Salvador Dalí, *La Persistance de la mémoire* – huile sur toile, 1931

*S'il fallait représenter l'espace-temps ...*



# Avènement, principes et succès

## La gravitation entre les XVI<sup>e</sup> et XIX<sup>e</sup> siècles

LA GRAVITATION est la première manifestation de la Nature dont nous prenons conscience dès nos premiers pas. C'est aussi elle qui coordonne le mouvement des astres dans le ciel et qui offre à la curiosité de l'Homme un riche éventail d'observations. Accumulées par Tycho Brahe (1546–1601) et affinées par Galilée (1564–1642) grâce à sa lunette astronomique, les mesures dans le système solaire ont conduit Kepler (1571–1630), grand adepte de la vision héliocentrique de Nicolas Copernic (1473–1543) et de Galilée, à énoncer ses fameuses lois sur les orbites elliptiques. Ces lois conduiront Isaac Newton (1642–1727) à comprendre la force gravitationnelle et son universalité – après avoir au passage inventé l'outil mathématique adéquat, le calcul différentiel. Ainsi, l'interaction gravitationnelle est la première à avoir été formulée dans un langage précis et opérationnel.

Dès le commencement, la gravitation a soulevé la question fondamentale de la nature de l'espace, du temps et des relations de ces concepts avec la matière. A la fin du XIX<sup>e</sup> siècle on s'accordait pour définir le cadre de la physique newtonienne comme suit : un espace euclidien  $E_3$  et un temps  $t$  prenant ses valeurs dans  $\mathbb{R}$ . L'espace euclidien est doté de deux structures :

- une *structure affine* (le parallélisme de Thales) :  $\forall x, y \in E_3, \exists \vec{x}\vec{y} \in V_3$ , un espace vectoriel naturellement associé (et souvent abusivement<sup>1</sup> identifié) à  $E_3$  ;
- une *structure métrique* (Pythagore) : il existe une forme bilinéaire symétrique, définie positive et non-dégénérée agissant sur toute paire de vecteurs  $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ , définissant un produit scalaire comme  $e(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$ .

1. L'espace vectoriel  $V_3$  est plutôt l'espace tangent à  $E_3$ , ou mieux, le fibré tangent.

L'espace et le temps sont *absolus*, autrement dit, ils sont donnés une fois pour toutes indépendamment de tout observateur. Ce caractère absolu fut tour à tour incarné dans l'*éther* et ébranlé par la relativité d'Einstein.

EN L'ABSENCE DE MATIÈRE *i.e.* dans le *vide*, une classe de référentiels occupe une place privilégiée dans l'espace-temps newtonien : les repères *galiléens* ou encore *inertiels*. Ils sont en mouvement rectiligne et uniforme, entre eux et par rapport à un référentiel absolu

2. Le référentiel absolu est celui que définissent les étoiles lointaines fixes. On notera un caractère paradoxal à cette définition faisant appel à la matière pour situer les repères qui sont privilégiés lorsque celle-ci est absente. Cette subtilité a été discutée par Ernst Mach (1938–1916) dont une conclusion était que *stricto sensu* l'espace-temps ne pouvait exister sans matière.

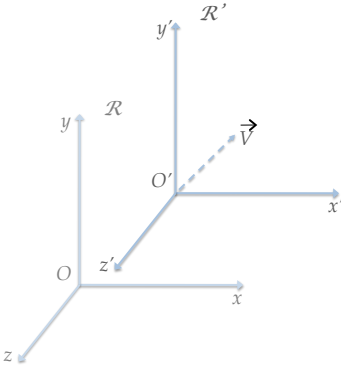


FIGURE 1: Deux référentiels d'inertie avec vitesse relative  $\vec{V}$ .

matérialisant l'espace euclidien<sup>2</sup>. Les lois de transformation galiléennes sont

$$\begin{aligned} t' &= t \\ \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{V}t \\ \vec{v}' &= \vec{v} - \vec{V} \\ \vec{a}' &= \vec{a} \\ \vec{F}' &= \vec{F}, \end{aligned} \quad (1)$$

où

$$\vec{r}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (2)$$

sont la position, la vitesse et l'accélération d'un point matériel et  $\vec{F}$  une force extérieure qui lui est appliquée (p. ex. une force électromagnétique). Enfin,  $\vec{V}$  est la vitesse relative *constante* des deux repères (voir fig. 1).

Les référentiels galiléens sont privilégiés car en l'absence de matière et de tout autre agent pouvant créer des forces, les corps d'épreuve y sont en *mouvement libre*, qui est rectiligne et uniforme :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t. \quad (3)$$

En présence de forces, le mouvement obéit à la *deuxième loi de Newton*, la loi fondamentale de la dynamique

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}, \quad (4)$$

invariante sous les transformations galiléennes (1). Dans cette équation,  $m$  est la masse *inerte* du corps.

EN PRÉSENCE DE MATIÈRE, caractérisée par sa densité volumique  $\rho(\vec{r}, t)$ , l'espace, inaltéré, devient le support d'un *champ de gravitation* décrit au moyen d'un potentiel scalaire  $\Phi(\vec{r}, t)$  qui satisfait l'équation de Poisson,

$$\boxed{\Delta\Phi = 4\pi G\rho}. \quad (5)$$

Ici,

$$G \approx 6,672 \times 10^{-8} \frac{\text{cm}^3}{\text{g s}^2} \quad (6)$$

est la constante de Newton, mesurée par Cavendish (1731–1810) en 1798 au moyen d'une balance de torsion.

Dans un champ de gravitation, l'équation du mouvement des corps d'épreuve ponctuels est, pour un observateur galiléen (4),

$$m\vec{a} + m_g \vec{\nabla}\Phi = 0, \quad (7)$$

où  $m_g$  est la masse *grave* du corps, c'est-à-dire l'agent qui traduit son interaction avec le champ gravitationnel. Rien ne suggère *a priori* l'égalité de  $m$  et  $m_g$ , parce qu'il n'y a aucune raison d'imaginer que l'inertie d'un corps traduit aussi sa disposition à créer ou à percevoir la gravité. C'est un fait expérimental, observé par Galilée<sup>3</sup>, que *pour tous les corps*  $m \approx m_g$ . Introduisant

3. et rapporté dans le mythe de la tour de Pise ...

$$\eta = \frac{m_g}{m} - 1, \quad (8)$$

les mesures, périodiquement répétées depuis celle d'Eötvös (1848–1919) en 1922, fournissent

$$|\eta| < 10^{-15}. \quad (9)$$

Cette propriété, érigée en principe fondamental, le *principe d'équivalence* stipulant que

$$m_g = m, \quad (10)$$

conduit rigoureusement à l'équation du mouvement

$$\vec{a} + \vec{\nabla}\Phi = 0, \quad (11)$$

et à l'*universalité de la chute des corps* dont le mouvement est indépendant de leur masse.

DANS UN REPÈRE NON INERTIEL, la loi (4) doit être abandonnée. L'équation du mouvement prend alors la forme

$$\frac{1}{m}\vec{F} = \vec{a} + \vec{a}_e + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}. \quad (12)$$

On y distingue l'accélération mesurée (ou apparente)  $\vec{a}$  et la cohorte de termes d'inertie (forces d'inertie une fois multipliées par  $-m$ ) : entraînement, Coriolis . . .

Lorsque  $\vec{F}$  est *purement gravitationnelle*,  $m$  disparaît de l'équation (12), et une conclusion fondamentale s'impose :

*En chaque point de l'espace  $P$  et en chaque instant  $t$ , il existe un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}_{ng}$  obtenu par ajustement des paramètres  $\vec{a}_e$  et  $\vec{\Omega}$  tel que*

$$\vec{a}|_{P,t}^{\mathcal{R}_{ng}} = 0.$$

*Ce nouveau repère est un repère en chute libre dans lequel tous les corps d'épreuve ont un mouvement d'apparence inertielle.*

Rigoureusement valable en un point et en un instant donné, cette propriété reste vraie approximativement dans un voisinage spatial et pour une durée finie dont les extensions dépendent des gradients de la force gravitationnelle. Si le champ était uniforme la validité serait sans limite, mais cela impliquerait, suivant l'équation de Poisson (5), l'absence de sources<sup>4</sup>. En pratique les champs gravitationnels ne sont pas uniformes, et au terme d'un temps d'observation relativement long, les objets apparemment au repos dans un vaisseau en chute libre p. ex., finissent par se rapprocher du fait de la convergence de leurs trajectoires.

L'universalité de la chute des corps suggère donc de ranger la force gravitationnelle parmi les forces d'inertie, lui ôtant dans la foulée son existence intrinsèque, laissant toutefois aux gradients de cette force le véritable rôle de champ de gravitation contrôlé par les sources – comme le traduit l'équation de Poisson.

4. Aucune distribution physique de matière ne peut créer un champ rigoureusement uniforme.

### Chute de l'éther et principe de relativité

LES TRAVAUX DE MAXWELL (1831–1879) sur les ondes électromagnétiques constituent l'aboutissement de près d'un siècle d'études sur les phénomènes électriques et magnétiques initiées par Coulomb (1736–1806) dès 1785. La seule tache dans cet édifice presque parfait était l'*éther luminifère*, milieu prétendument élastique servant de support à la propagation des ondes électromagnétiques, à l'instar des fluides permettant la transmission des ondes sonores.

Aucune expérience n'avait jamais révélé l'existence de l'éther. Conformément à l'esprit newtonien, ce dernier devait remplir l'espace euclidien et être au repos dans le référentiel absolu des étoiles fixes, dont il fournissait en définitive la matérialisation. Dans ce repère absolu, la lumière était censée se propager à la vitesse

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (13)$$

5. Ici,  $\Psi(\vec{r}, t)$  représente les composantes du champ électrique et magnétique de l'onde.

et ses composantes obéir à<sup>5</sup>

$$\square \Psi(\vec{r}, t) \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (14)$$

Tout mouvement par rapport à l'éther devait donc se manifester par un écart dans la vitesse de propagation de l'onde. Le référentiel terrestre en particulier devait être le siège de phénomènes optiques mesurables, mettant en évidence la vitesse de la Terre par rapport à l'éther luminifère.

Les expériences d'interférométrie de Michelson (1852–1931) et Morley (1838–1923) réalisées en 1881 et 1886 échouèrent à démontrer le mouvement de la Terre dans l'éther. On finit par mettre en doute son existence en postulant, suivant Einstein (1879–1955) dans son célèbre travail de 1905, le *principe de relativité* :

*La vitesse  $c$  de la lumière dans le vide est invariante i.e. indépendante de l'observateur.*

LE POSTULAT DE RELATIVITÉ est lourd de conséquences. La mesure des intervalles spatiaux étant relative à chaque référentiel, exiger l'invariance de  $c$  est incompatible avec la nature absolue du temps. Celui-ci devient relatif et propre à un observateur. La séparation entre temps et espace devient une affaire de repère et *seul l'espace-temps conserve un caractère absolu – ou intrinsèque*. A  $E_3 \times \mathbb{R}$  on substitue l'*espace-temps de Minkowski* (1864–1909)  $M_4$ .

Comme pour l'espace-temps de Newton, les référentiels galiléens sont privilégiés pour celui de Minkowski. Ils sont dotés d'un système de 4 coordonnées<sup>6</sup>  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$  et  $x^0 = ct$  qui relient les événements  $\mathcal{P}$ . Une *structure affine* est manifeste dans ces référentiels, où, pour deux événements  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$ ,  $\delta x^\mu = x^\mu_{\mathcal{P}} - x^\mu_{\mathcal{Q}}$  sont les composantes d'un *quadrivecteur*. Cette structure affine s'accompagne d'une *structure métrique* : le quadrivecteur de composantes

6. Les indices des coordonnées sont volontairement en position supérieure. Cet usage n'est pas fortuit, mais nous ne nous étendons pas sur le sujet ici.



$\delta x^\mu$  a pour norme au carré

$$\delta s^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 - c^2 \delta t^2 \equiv \eta_{\mu\nu} \delta x^\mu \delta x^\nu. \quad (15)$$

C'est autour de cette norme inhabituelle que s'articule la charpente de la relativité<sup>7</sup>.

1. On a introduit dans (15) une forme quadratique

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (16)$$

Cette forme bilinéaire est symétrique et non dégénérée mais elle n'est pas définie positive. On l'appelle *métrique de Minkowski* et elle permet d'écrire très simplement l'opérateur d'Alembertien :

$$\square \Psi(\vec{r}, t) = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Psi(\vec{r}, t), \quad (17)$$

où on a introduit la forme inverse  $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ .

2. La forme bilinéaire  $\eta_{\mu\nu}$  traduit la propagation de la lumière et plus généralement la physique des phénomènes électromagnétiques. Leur formulation est la même dans tous les référentiels où  $\eta_{\mu\nu}$  reste inchangée, et ceci définit la classe des référentiels galiléens. Les transformations qui les relient sont à présent les *transformations de Lorentz*<sup>8</sup> :

$$\begin{aligned} ct' &= \Gamma [ct - \vec{B} \cdot \vec{r}] \\ \vec{r}'_{\parallel} &= \Gamma [\vec{r}_{\parallel} - \vec{B}ct] \\ \vec{r}'_{\perp} &= \vec{r}_{\perp}, \end{aligned} \quad (18)$$

où on développe  $\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$  par rapport à  $\vec{V}$  et

$$\vec{B} = \frac{\vec{V}}{c}, \quad \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - B^2}} \quad \text{et} \quad B^2 = \|\vec{B}\|^2. \quad (19)$$

Dans ces expressions,  $(t, \vec{r})$  sont les coordonnées  $(t, x, y, z)$  d'un évènement mesurées dans le repère  $\mathcal{R}$  et  $(t', \vec{r}')$  leurs homologues mesurées dans le repère  $\mathcal{R}'$  en mouvement uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$ , à vitesse  $\vec{V}$  (voir fig. 1 et 2). Dans le régime  $v/c \ll 1$  on retrouve les transformations galiléennes (1).

3. La loi galiléenne de composition des vitesses (1) est altérée. On déduit de (18) ( $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$ ) que

$$\vec{v}'_{\parallel} = \frac{\vec{v}_{\parallel} - \vec{V}}{1 - \frac{\vec{V} \cdot \vec{v}}{c^2}}, \quad \vec{v}'_{\perp} = \frac{\vec{v}_{\perp}}{\Gamma \left(1 - \frac{\vec{V} \cdot \vec{v}}{c^2}\right)}. \quad (20)$$

On vérifié sur ces relations que  $\|\vec{v}\| = c$  ssi  $\|\vec{v}'\| = c$  : *la vitesse de la lumière dans le vide est un invariant*.

4. Le temps dépend du mouvement. Pour un observateur le long d'une ligne d'univers, on postule qu'entre deux points infiniment proches, le temps propre écoulé est proportionnel à  $ds$ ,

$$d\tau^2 = -\frac{ds^2}{c^2} = \frac{dt^2}{\gamma^2}, \quad (21)$$

7. On adopte la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés en position supérieure et inférieure. Ces indices se correspondent par contraction avec la forme quadratique ou son inverse.

8. Hendrick Lorentz (1853–1928), à ne pas confondre avec Ludvig Lorenz (1829–1891) à qui nous devons la *jauge* homonyme en électromagnétisme.

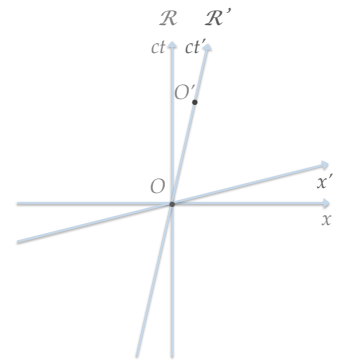


FIGURE 2: Deux référentiels d'inertie avec vitesse relative  $\vec{V}$  dans un diagramme d'espace-temps.

où on a introduit

$$v^x = \frac{dx}{dt}, \quad v^y = \frac{dy}{dt}, \quad v^z = \frac{dz}{dt} \quad (22)$$

9.  $v^2 = (v^x)^2 + (v^y)^2 + (v^z)^2$

et<sup>9</sup>

$$\gamma = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \geq 1. \quad (23)$$

Entre deux points quelconques de la ligne définissant un arc  $C$

$$\Delta\tau = \int_C \frac{dt}{\gamma} \leq \Delta t. \quad (24)$$

est le temps réellement écoulé pour l'observateur en mouvement.

5. Pour un objet ponctuel en mouvement le long d'une ligne d'univers paramétrée  $x^\mu = x^\mu(\tau)$ , on définit les *quadrivecteurs vitesse et accélération*, de composantes<sup>10</sup> :

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad a^\mu = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}. \quad (25)$$

Toute la physique relativiste est bâtie sur ce type d'objet, qui possède une loi de transformation *linéaire* par changement de repère. Par exemple, la seconde loi de Newton devient

$$\boxed{F^\mu = ma^\mu}, \quad (26)$$

où  $m$  est la masse de l'objet, postulée invariante. La *quadriforce* est construite au moyen de la force ordinaire et la quatrième équation est celle pour la puissance dissipée.

Ainsi se résument donc les propriétés les plus saillantes de la relativité, telle que formulée par Einstein en 1905. Sans oublier la fameuse relation énergie-impulsion,

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2, \quad (27)$$

et la limite de la vitesse de transmission de tout signal à  $c$ .

POUR RÉSUMER :

Toutes les équations et lois de la physique sont invariantes de forme sous les changements de référentiels galiléens.

### Généralisation du principe de relativité

L'EXISTENCE DE RÉFÉRENTIELS PRIVILÉGIÉS dans l'espace-temps de Minkowski ne fait pas de mystère. Elle traduit les propriétés d'isométrie de cet espace<sup>11</sup>, de même que l'espace euclidien tridimensionnel peut être muni de coordonnées cartésiennes du fait de sa structure homogène et isotrope. Il n'est pas moins frustrant pour autant de limiter<sup>12</sup> la validité des lois de la physique aux seuls repères de ce type, qui constituent souvent une vue de l'esprit, ou une approximation plus ou moins justifiée.

10. Pour la vitesse,  $u^0 = \gamma c$  et  $\vec{u} = \gamma \vec{v}$ . Afin de limiter la prolifération de symboles, nous utilisons  $\vec{a}$  (de composantes  $a^i$ ) à la fois pour l'accélération newtonienne (dérivée par rapport à  $t$ , (2)) et pour les composantes spatiales de son homologue relativiste (dérivée par rapport à  $\tau$ , (25)). Le contexte permet de faire le distinguo. Notons toutefois la relation :

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \gamma^2 \frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} + \vec{v}\gamma \frac{d\gamma}{dt}$$

et

$$a^0 = c\gamma \frac{d\gamma}{dt}.$$

11. Le groupe de Poincaré, grande figure de la relativité (1854-1912).

12. D'où le nom *a posteriori* de relativité restreinte.

En 1907, Einstein s'engage sur la voie de généraliser la relativité afin de formuler les lois de la mécanique et de l'électromagnétisme de manière manifestement indépendante du choix de référentiel. On dira de cette formulation qu'elle est *covariante générale* pour souligner le fait que la plupart des objets physiques<sup>13</sup> se transforment au cours d'un changement de repère (de coordonnées), cette transformation n'affectant pas les équations auxquelles elles obéissent.

CE PROBLÈME EST DE NATURE GÉOMÉTRIQUE. Considérons un cas d'école, le vecteur accélération de la physique newtonienne en repère inertiel muni de coordonnées cartésiennes, dans un problème planaire. Ses composantes sont<sup>14</sup> :

$$a^x = x'', \quad a^y = y''. \quad (28)$$

En coordonnées polaires, les composantes de ce même vecteur *ne sont pas*  $r''$  et  $\varphi''$ , mais bien

$$a^r = r'' - r\varphi'^2, \quad a^\varphi = \varphi'' + 2\frac{r'}{r}\varphi', \quad (29)$$

parce que le dièdre local (qui ici n'est pas orthonormé) est mobile.

De la même façon, passant à l'espace-temps, le quadrivecteur accélération  $\mathbf{a}$  aura pour composantes (voir (25))  $a^\rho = \frac{d^2x^\rho}{d\tau^2}$  dans un référentiel galiléen, mais

$$a^\rho = \frac{d^2x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (30)$$

dans un repère quelconque. Dans cette expression,  $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$  sont les *symboles de Christoffel* dans lesquels sont codées les propriétés du tétraèdre local mobile<sup>15</sup> (pas forcément orthonormé). On les détermine à partir de la forme quadratique (15), qui n'est plus la forme de Minkowski, mais est obtenue à partir de cette dernière à l'aide du changement de référentiel. On l'écrit

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu, \quad (31)$$

et<sup>16</sup>

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda} (\partial_\nu g_{\lambda\rho} + \partial_\rho g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\nu\rho}), \quad (32)$$

où  $g^{\mu\lambda}$  sont les composantes de la forme inverse. Le temps propre le long d'un arc de ligne d'univers infinitésimal reliant  $x^\mu$  et  $x^\mu + dx^\mu$  est défini comme en (21)

$$d\tau^2 = -\frac{ds^2}{c^2}. \quad (33)$$

Examinons à titre d'illustration l'espace-temps de Minkowski du point de vue d'un référentiel en rotation uniforme autour de l'axe Oz. Pour cela on se place en coordonnées cylindriques avec un angle polaire dépendant linéairement du temps :

$$x = r \cos(\varphi + \Omega t), \quad y = r \sin(\varphi + \Omega t), \quad (34)$$

13. A l'exception des invariants comme la vitesse de la lumière dans le vide, la masse, la charge électrique ou encore le temps propre.

14. Nous adoptons  $f' = \frac{df}{dt}$ .

15. Ces symboles définissent une connexion, ici de Levi-Civita. Ils comparent en chaque point le repère mobile local avec les repères voisins, transportés parallèlement.

16. On entend par  $f(x)$  la dépendance par rapport aux quatre coordonnées d'espace-temps, et on note  $\partial_\lambda = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}$ .

$z$  et  $t$  demeurant inchangées. Le repère ainsi défini est naturellement associé à une plate-forme tournante. Après avoir substitué les transformations (34) dans (15), on obtient pour forme (31),

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{r^2 \Omega^2}{c^2} \right) c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 + 2r^2 \Omega d\varphi dt + dz^2. \quad (35)$$

On peut alors poursuivre, calculer les symboles de Christoffel grâce à (32) et déterminer les composantes du quadrivecteur accélération (30). Il vient<sup>17</sup> (le repère naturel n'est pas orthonormé, comme on peut lire sur (35)) :

$$\begin{aligned} a^t &= c\ddot{t} \\ a^r &= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - 2r\Omega\dot{\varphi}\dot{t} - r\Omega^2\dot{t}^2 \\ a^\varphi &= \ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{t}}{r}(\dot{\varphi} + \Omega\dot{t}) \\ a^z &= \ddot{z}. \end{aligned} \quad (36)$$

Le lecteur averti aura reconnu dans les deux derniers termes de  $a^r$  dans (36) les accélérations de Coriolis et centrifuge ; les corrections relativistes résultent de l'usage du temps propre (invariant) et sont négligeables lorsque  $\dot{t} \rightarrow 1$  (limite où tous les temps s'identifient).

L'expression des composantes du quadrivecteur accélération (30) porte le nom de *dérivée covariante*

$$a^\rho = \frac{Du^\rho}{d\tau}, \quad (37)$$

car son expression est *indépendante* du repère. Dans un repère galiléen, seul le premier terme est présent. Dans tout autre repère, un second terme apparaît, qui contient toutes les composantes d'inertie produites par le mouvement non inertiel du référentiel, le premier étant l'accélération apparente. Ceci permet de conclure sur la généralisation de la relativité :

*La loi fondamentale de la dynamique (26)*

$$F^\mu = ma^\mu,$$

*est vraie dans tout référentiel, quel que soit le mouvement de ce dernier, à condition de définir l'accélération au moyen de la dérivée covariante (30), (37).*

On notera en passant que pour un *mouvement libre* ( $F^\mu = 0$ )

$$a^\mu = 0 \quad (38)$$

*toujours*. Dans un repère d'inertie, l'accélération apparente  $\ddot{x}^\mu$  (seule présente car  $\Gamma^\rho_{\mu\nu} = 0$ ) s'annule, et le mouvement est rectiligne et uniforme. Dans tout autre référentiel, il y a un terme de Christoffel, des forces d'inertie, et le mouvement se fait généralement le long d'une courbe.

DANS LA VEINE DE GÉNÉRALISER LA RELATIVITÉ à *tous* les référentiels, Einstein franchit le dernier pas :

17. Ici  $\dot{t} = \frac{dt}{d\tau}$ , où  $\tau$  est le temps propre défini en (33) et impliquant que la norme de la quadrivitesse vaut  $\|\mathbf{u}\|^2 = |ds/d\tau|^2 = -c^2$ .

Toutes les équations et lois de la physique sont invariantes de forme sous changements de référentiels quelconques à condition d'y substituer les dérivées ordinaires par des dérivées covariantes :  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ .

Ainsi, l'opérateur d'Alembertien de l'équation des ondes électromagnétiques devient <sup>18</sup>

$$\square\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{-\det g}} \partial_\mu \left( \sqrt{-\det g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Psi(x) \right). \quad (39)$$

Dans le référentiel tournant étudié ci-dessus (voir p. ex. (35)), on trouve

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\Omega^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2\Omega}{c^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (40)$$

Suivant ce paradigme, on peut récrire les équations de Maxwell de façon covariante et achever la description de presque toute la physique.

### Et la gravitation ?

LE RÉFLEXE NATUREL pour inclure la gravitation dans le schéma développé ci-dessus serait de généraliser le potentiel gravitationnel scalaire  $\Phi$ , fonction du temps et de l'espace, et d'en tirer la force gravitationnelle par dérivation covariante,  $F^\mu = -D^\mu \Phi$ . L'espace de Minkowski deviendrait alors l'hôte passif du champ gravitationnel.

Cette démarche butte sur un point important, souligné un peu plus haut dans l'exposé. La force de gravitation peut être annulée localement en un point d'espace-temps  $\mathcal{P}$ , en passant à un référentiel en chute libre en ce point précis. Or, au cours d'un changement de référentiel, géométriquement réalisé au moyen d'une transformation de coordonnées, les composantes d'un quadrivecteur, dont la force, se transforment *linéairement* grâce à une matrice jacobienne :

$$F^\mu \rightarrow F'^\mu = J^\mu_\nu F^\nu. \quad (41)$$

Cette jacobienne est inversible et  $F^\nu(\mathcal{P}) \neq 0$  ssi  $F'^\mu(\mathcal{P}) \neq 0$ , en contradiction avec le principe d'équivalence.

IL EXISTE UNE CONTRADICTION PLUS PROFONDE ENCORE, qui met en cause l'espace de Minkowski lui-même, autant que l'objet mathématique adéquat pour représenter la force gravitationnelle. Cette contradiction est révélée dans la réponse à la question fondamentale suivante : *la vision newtonienne de la gravitation, est-elle compatible avec le cadre conceptuel de la relativité et, en particulier, avec le caractère absolu de la vitesse de la lumière dans le vide ?* La réponse est *négative* et se fonde sur deux expériences de pensée.

**Photons et rougissement gravitationnel** (Einstein 1911). Par cette expérience, Einstein démontre que la propagation de la lumière est affectée par le champ gravitationnel.

18. Les dérivées covariantes  $D_\mu$  ont un premier terme en  $\partial_\mu$  et d'autres termes impliquant les symboles de Christoffel. Dans un référentiel galiléen muni de coordonnées cartésiennes,  $D_\mu = \partial_\mu$ .

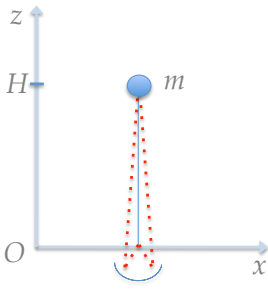


FIGURE 3: L'expérience de désintégration d'Einstein.

Supposons à cet effet l'existence d'un champ uniforme et statique :  $\Phi = gz$ . Une particule de masse  $m$  est lâchée depuis  $z = H$ . En  $z = 0$ , celle-ci se désintègre, produisant deux photons. Par un jeu de miroirs, les photons sont réfléchis et renvoyés en  $z = H$ , où ils se recombinaient en une particule massive (voir fig. 3).

Pour chaque altitude, nous pouvons faire le bilan énergétique, tenant pour acquise la validité de la conservation de l'énergie formulée en relativité, c'est-à-dire incluant la masse :

$$z = H \text{ énergie cinétique : } mc^2, \text{ énergie potentielle : } mgH ;$$

$$z = 0 \text{ énergie cinétique : } mc^2 (1 + gH/c^2), \text{ pas d'énergie potentielle.}$$

Chacun des photons produits a donc une pulsation  $\omega_0 = mc^2/2\hbar (1 + gH/c^2)$ .

Si la propagation de la lumière n'est pas affectée par le champ gravitationnel, cette fréquence restera conservée. En  $z = H$ , la recombinaison fournira donc une particule de masse  $m' = m (1 + gH/c^2)$ .

Une telle conclusion est insensée car elle est en flagrante contradiction avec la conservation de l'énergie<sup>19</sup>. La seule façon de réconcilier les concepts en jeu est d'affirmer que la fréquence de la lumière dépend de la hauteur, c'est-à-dire du potentiel gravitationnel :

$$\omega_H = \frac{\omega_0}{1 + \frac{gH}{c^2}} = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\Phi(H)}{c^2}}. \quad (42)$$

La propagation vers une région de potentiel croissant produit donc un rougissement. Ce rougissement gravitationnel prédit par Einstein en 1911 a été mesuré au cours des années 1959-1965 par Pound, Rebka et Snider.

**Rougissement gravitationnel et courbure de l'espace-temps** (Schild entre 1960 et 1967). Ici Schild interprète le rougissement gravitationnel en terme d'alteration de l'écoulement temporel. Il aboutit à la conclusion que le champ gravitationnel doit incurver l'espace-temps et conduire à l'abandon de l'espace de Minkowski.

Le décalage en fréquence (42) d'un signal admet une interprétation naturelle en relativité. Des observateurs au repos dans le repère associé au champ statique et uniforme, et situés en  $z = 0$  et  $z = H$ , doivent mesurer des intervalles de temps propre différents :

$$\Delta\tau_H = \Delta\tau_0 \left(1 + \frac{gH}{c^2}\right) = \Delta\tau_0 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right). \quad (43)$$

Supposons à présent que ces deux observateurs échangent consécutivement deux photons. Ceux-ci sont envoyés par l'observateur au repos en  $z = 0$  avec un décalage temporel de  $\Delta\tau_0$ . Ils sont reçus par son homologue en  $z = H$  en deux instants successifs séparés de  $\Delta\tau_H$  (voir (43)).

— Sous l'hypothèse que l'espace-temps est de Minkowski, la lumière se propage de façon universelle, à vitesse  $c$  donc à  $45^\circ$  dans un diagramme d'espace-temps. En effet, le champ gravitationnel

19. En répétant l'expérience, on pourrait ainsi, grâce à  $m$ , extraire du champ une masse arbitrairement grande.

20. Savoir si l'on pouvait conserver ou s'il fallait abandonner l'espace de Minkowski en présence de gravité a été un long débat, dans les années soixante en particulier, au moment du renouveau de la relativité générale.

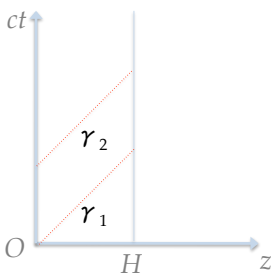


FIGURE 4: L'échange des deux photons imaginé par Schild, dans un diagramme d'espace-temps.

étant uniforme, cette propriété n'a aucune raison d'être invalidée. Le champ étant par ailleurs statique, les lignes d'univers des deux rayons seront parallèles, comme sur la fig. 4.

- Les deux observateurs étant au repos, leurs lignes d'univers sont parallèles dans le diagramme considéré (voir fig. 4).

Les lignes d'univers des observateurs  $\mathcal{O}_0$  et  $\mathcal{O}_H$ , avec les lignes d'univers des rayons  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  forment un parallélogramme. Deux des côtés de ce parallélogramme ont cependant des longueurs différentes,  $c\Delta\tau_H > c\Delta\tau_0$ . Ceci est incompatible avec la caractéristique plat de l'espace de Minkowski, censé ici porter le champ gravitationnel <sup>21</sup>.

ON POURRAIT NUANCER TOUS CES ARGUMENTS dans l'espoir de déjouer les contradictions révélées ci-dessus. Et il est vrai qu'on trouve dans la littérature de nombreuses tentatives de réconciliation entre la gravitation et l'espace de Minkowski. Toutes celles-ci ont soit échoué, soit abouti par des voies très détournées aux mêmes conclusions que les expériences d'Einstein et Schild.

Il est enfin opportun de signaler que de nombreuses idées ont précédé la théorie de la relativité d'Einstein, contribuant à façonner la gravitation post-newtonienne. Le principe de Mach déjà cité, joua un rôle majeur pour asseoir le concept de repère inertiel de manière plus dynamique ou plus absolue, préparant les esprits à sa généralisation en présence de champ gravitationnel.

### Formulation relativiste de la gravitation

EN RÉSUMÉ, d'une part, effet du champ gravitationnel sur une masse *n'est pas dans un quadrivecteur force* et, d'autre part, le champ gravitationnel lui-même *altère l'espace-temps* en l'incurvant. Comment, dans ces conditions, décrire le mouvement des corps d'épreuve ?

Revenons au principe d'équivalence. Celui-ci nous dit que le mouvement, dans un référentiel en chute libre en  $\mathcal{P}$ , satisfait :

$$\left. \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \right|_{\mathcal{P}}^{\mathcal{R}_{\text{chute libre}}} = 0. \quad (44)$$

Passer dans un référentiel quelconque aura pour *seul effet* de révéler des symboles de Christoffel, qui apparaissent dans la forme la plus générale des composantes du quadrivecteur accélération. Comme le point de référence  $\mathcal{P}$  est arbitraire, ce raisonnement peut être reproduit à l'identique en n'importe quel autre point de l'espace-temps. On en conclut donc que, *quel que soit le système de référence*, l'équation du mouvement des corps d'épreuve ponctuels en chute libre est <sup>22</sup>

$$\boxed{a^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0.} \quad (45)$$

21. Pour la même raison qu'il est impossible de dessiner sur le plan un triangle dont la somme des angles soit supérieure à  $180^\circ$  ; cela est cependant possible sur la sphère.

22. On reconnaît l'équation des géodésiques i.e. des courbes de longueur d'espace-temps extrémales.

*Contrairement à la force électromagnétique, qui apparaît dans une expression de type  $F^\mu$ , la force gravitationnelle est codée dans les symboles de Christoffel comme toutes les forces d'inertie. En relativité générale, la gravitation est « géométrisée ».*

CE QUI DISTINGUE PHYSIQUEMENT la présence de l'absence de champ gravitationnel n'est donc pas la force gravitationnelle, mais la possibilité ou l'impossibilité d'annuler *globalement* cette dernière.

Dans l'espace de Minkowski, un repère accéléré peut simuler un champ de gravitation, mais on a toujours la liberté du choix galiléen pour lequel les symboles de Christoffel s'annulent rigoureusement partout.

En présence de champ de gravitation, les gradients de la force gravitationnelle, autrement dit les gradients des symboles de Christoffel, constituent une obstruction à leur propre annulation globale. Le champ gravitationnel est donc, par essence, codé dans ces gradients. *Ces gradients traduisent donc la courbure de l'espace-temps, qui d'après Einstein–Schild est inhérente à ce champ.* Suivant Riemann (1826–1866), on définit le *tenseur de courbure*

$$R_{\lambda\mu\nu}{}^\rho = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\rho. \quad (46)$$

S'il s'annule, le champ de gravitation est absent, et l'espace-temps est de Minkowski. Il existe dans ce cas un repère *globalement inertielle* dans lequel la forme quadratique  $g_{\mu\nu}$  devient  $\eta_{\mu\nu}$  et  $\Gamma_{\lambda\nu}^\rho$  s'annule *partout*. Si le tenseur de Riemann ne s'annule pas, la force gravitationnelle peut être nulle localement ( $\Gamma_{\mu\nu}^\rho(\mathcal{P}) = 0$ ) mais pas globalement : il y a un champ de gravitation et l'espace n'est pas de Minkowski. Sa forme quadratique  $g_{\mu\nu}$  ne peut pas prendre globalement la forme  $\eta_{\mu\nu}$ .

Nous retiendrons (de façon symbolique pour les formules) :

*En relativité générale, la notion de distance spatio-temporelle  $g$  mesure le temps propre et joue le rôle de potentiel pour toutes les forces d'inertie, y compris celle de la gravitation. Son gradient  $\Gamma = \partial g$  fournit lesdites forces, dont l'intensité locale dépend du système de coordonnées, en d'autres mots du référentiel. Le gradient de ces forces (les « forces de marée »)  $R = D\Gamma$  est la courbure de l'espace-temps. Celle-ci est la caractérisation intrinsèque et exclusive du champ gravitationnel.*

### Equations, solutions, exploitation

LE LECTEUR IMPATIENT se pose sans doute déjà de nombreuses questions :

- Quels sont les critères qui délimitent la validité de l'approche newtonienne à la gravitation ?



- Dans le régime newtonien, comment les composantes de la forme quadratique  $g_{\mu\nu}$  sont-elles reliées au potentiel gravitationnel « classique »<sup>23</sup>  $\Phi$  ?
- Quelles sont les équations qui remplacent l'équation de Poisson (5) pour la détermination des  $g_{\mu\nu}(x)$  ?
- Une fois les équations mises en place, comment en exploiter les solutions, corriger la physique newtonienne et découvrir de nouveaux horizons.

23. Par opposition à « relativiste ».

En réponse à ces questions, on peut broser le rapide tableau suivant.

1. S'agissant du mouvement d'un corps, le régime non relativiste nécessite  $v/c \ll 1$ . Développant en série les équations relativistes (45), retenant l'ordre dominant et comparant aux équations newtoniennes (11) on trouve

$$g_{00} \approx -1 - \frac{2\Phi}{c^2}. \quad (47)$$

Preuve. L'approximation newtonienne est prise dans (45) en supposant  $u^i/c \ll 1$  et le champ statique,  $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$ . Il vient pour les composantes spatiales de l'accélération

$$a^i \approx \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{00} (u^0)^2$$

avec

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} g^{i\lambda} (2\partial_0 g_{\lambda 0} - \partial_\lambda g_{00}) = -\frac{1}{2} g^{ij} \partial_j g_{00} = -\frac{1}{2} \nabla^i g_{00},$$

où  $\nabla^i = g^{ij} \partial_j$  est l'opérateur gradient usuel. Par ailleurs,

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{d^2 t}{d\tau^2} u^i + \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx \left( \frac{u^0}{c} \right)^2 \frac{d^2 x^i}{dt^2}.$$

L'équation relativiste  $a^i = 0$  fournit donc

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} - \frac{c^2}{2} \nabla^i g_{00} \approx 0.$$

La comparaison avec (11) aboutit au résultat annoncé en (47), après avoir ajusté la constante additive du potentiel de sorte qu'en l'absence de sources gravitationnelles on retrouve l'espace-temps de Minkowski,  $g_{00} = \eta_{00} = -1$ .

*Voilà donc comment le potentiel gravitationnel newtonien modifie la géométrie de l'espace-temps.*

Ce résultat fournit un corollaire. Supposons que le champ gravitationnel soit central et engendré par une masse  $M$ . Alors  $\Phi = -MG/r$  ( $r$  est la distance au centre d'attraction) et

$$g_{00} \approx -1 + \frac{2MG}{rc^2}. \quad (48)$$

Pour que l'approximation newtonienne soit justifiée il faut donc que

$$\frac{2MG}{c^2} \ll r. \quad (49)$$

24. Les rayons gravitationnels de la Terre et du Soleil sont  $r_g^{\oplus} \approx 8,9 \text{ mm}$  et  $r_g^{\odot} \approx 2,9 \text{ km}$ , très inférieurs à leurs rayons respectifs (6 400 et 696 000 km).

La combinaison de la constante de Newton  $G$  et de la vitesse de la lumière  $c$  fournit avec la masse  $M$  une *nouvelle échelle de longueur*, appelée *rayon gravitationnel*  $r_g = 2MG/c^2$ . Le régime  $r \gg r_g$  est le *régime de champ faible* où la relativité générale apporte des corrections perturbatives à la physique newtonienne<sup>24</sup>. Lorsque  $r \approx r_g$ , des phénomènes nouveaux apparaissent.

2. Substituant (47) dans l'équation de Poisson (5), on récrit cette dernière comme suit :

$$-\Delta g_{00} = \frac{8\pi G}{c^2} \varrho. \quad (50)$$

Le membre de gauche est une dérivée seconde de la métrique. Il traduit la courbure de l'espace-temps, dans la limite newtonienne. Le membre de droite est la source du champ de gravitation, c'est-à-dire la densité de matière.

L'équation (50) est la limite newtonienne d'une équation du champ relativiste bâtie sur le même motif :

$$\ll \text{courbure} = \frac{8\pi G}{c^4} \text{énergie} \gg,$$

*énergie* car en relativité il n'y a pas de distinction entre masse et énergie (au facteur  $c^2$  près); l'une et l'autre sont donc la source du champ gravitationnel. Plus précisément, il vient

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (51)$$

que l'on appelle *équations d'Einstein*, où  $T_{\mu\nu}$  est le *tenseur densité d'énergie-impulsion*<sup>25</sup> et  $G_{\mu\nu}$  le *tenseur d'Einstein* bâti sur le tenseur de Riemann<sup>26</sup>.

25. En électromagnétisme, le quadri-vecteur densité de courant  $j^\mu$  contient la densité et le flux de charge. Ici, le tenseur densité d'énergie-impulsion contient la densité et le flux d'énergie ainsi que la densité et le flux d'impulsion.
26. Le *tenseur de Ricci* est  $R_{\mu\nu} = R_{\lambda\mu\nu}{}^\lambda$ , la *courbure scalaire*  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  (trace du tenseur de Ricci) et le *tenseur d'Einstein*  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}$ .

3. La première *solution exacte* des équations d'Einstein fut obtenue par Karl Schwarzschild (1873–1916) moins de deux mois après la présentation des dites équations par Einstein à l'Académie de Prusse, en novembre 1915. Elle décrit le champ gravitationnel statique à symétrie sphérique créé par une masse ponctuelle  $M$  et se formule comme suit, en coordonnées sphériques, dans un référentiel où la masse source est au repos :

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2MG}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2MG}{c^2 r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (52)$$

EN RÉSUMÉ, NOUS RETIENDRONS CECI :

— En relativité générale, le champ de gravitation et l'espace-temps, c'est-à-dire le contenu et le contenant, sont indistinguables. Chaque solution nécessite donc une interprétation *ab initio* de tous les concepts sous-jacents à la mesure des distances et du temps.

— Les équations du champ (51) satisfont la covariance générale, elles ont donc la même forme dans tout système de coordonnées i.e. dans tout repère local (invariance sous les difféomorphismes). Deux solutions apparemment différentes peuvent représenter le même champ gravitationnel dans deux systèmes distincts.

— Les « potentiels gravitationnels »  $g_{\mu\nu}$  obéissent un système d'équations non-linéaires, les équations d'Einstein (51). On ne peut donc plus superposer linéairement des solutions (comme pour le champ électromagnétique ou pour le potentiel newtonien) sauf, approximativement, dans les régions de champ faible. Le champ gravitationnel relativiste est auto-interagissant, il contribue à sa source.

REVENONS À LA SOLUTION DE SCHWARZSCHILD. Quelles propriétés physiques mesurables pouvons-nous en extraire ?

1. Pour un observateur au repos ( $dr = d\theta = d\varphi = 0$ ), le temps propre  $\tau$  (33) est relié au temps coordonnée  $t$  par la relation

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2MG}{c^2 r}} dt. \tag{53}$$

On retrouve, sous l'hypothèse où  $r_g = 2MG/c^2 \ll 1$  de manière à développer la racine carrée au premier ordre (souvent justifié, voir note 24) l'expression (43)<sup>27</sup>,

$$\Delta\tau \approx \left(1 - \frac{MG}{c^2 r}\right) \Delta t, \tag{54}$$

27. Ici,  $\Delta t$  est l'intervalle de temps propre pour un observateur à l'infini.

et donc le rougissement gravitationnel (42) prédit par Einstein en 1911.

*Le rougissement gravitationnel a été mesuré dès 1959 à Harvard (expériences de Pound, Rebka et Snider) entre deux points distants verticalement de 22,6 m. Cette mesure constitue historiquement le 3<sup>e</sup> test de la relativité générale.*

28. Mesure effectuée par effet Mössbauer pour atteindre  $\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx 2 \times 10^{-15}$ .

2. L'étude du mouvement des corps ponctuels dans le champ créé par une masse  $M$  nécessite la résolution des équations (45) (équations des géodésiques) dans la métrique de Schwarzschild (52). On aboutit au problème de Kepler corrigé par un terme en  $1/r^3$  dans le potentiel effectif :

$$U_{\text{eff}} = -\frac{mMG}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{\ell^2 MG}{mc^2 r^3}; \tag{55}$$

ici  $m$  est la masse du corps d'épreuve et  $\ell$  son moment cinétique.

Il est bien connu que toute correction au problème de Kepler a pour effet d'ouvrir les orbites elliptiques. Si la correction est petite<sup>29</sup>, comme c'est le cas pour les planètes du système solaire, l'orbite est une ellipse en précession. Traitant la correction

29. Le dernier terme, dû à la relativité générale, se récrit  $-\ell^2 r_g / 2mr^3$ .

perturbativement à l'ordre dominant, on trouve une avance du périastre, qui après  $n$  révolutions vaut

$$\Delta\varphi \approx 6\pi n \frac{MG}{c^2 R}, \quad (56)$$

où  $R = \ell^2/m^2MG$  est le rayon moyen de l'orbite (rayon de l'orbite circulaire). La planète la plus proche du système solaire est Mercure<sup>30</sup>. C'est pour cette planète que l'effet de la relativité générale est donc le plus intense et on trouve 41,16'' d'arc par siècle. Cet effet s'ajoute à tous les autres dus, entre autre, aux autres corps du système solaire.

30.  $R_{\text{M}} \approx 58 \times 10^6$  km et  $T_{\text{M}} \approx 88$  jours.

*L'anomalie de l'avance du périhélie de Mercure observée en 1859 par Urbain Le Verrier (1811–1877) était restée sans explication jusqu'à la communication d'Einstein en novembre 1915, qui la présentait comme le 1<sup>er</sup> test de sa théorie.*

3. Le potentiel effectif (55) est valable aussi pour la lumière, à l'exception du premier terme (potentiel Newtonien), absent dans ce cas. En conséquence, les rayons lumineux s'incurvent au voisinage d'un astre massif ; s'ils proviennent d'une étoile lointaine, celle-ci semble donc située à une hauteur angulaire apparente, différente de la hauteur réelle. Autour d'une masse  $M$ , la déflexion totale par rapport à la ligne droite est de (toujours au premier ordre en la correction relativiste)

$$\Delta\varphi \approx \frac{4MG}{c^2 r_0}, \quad (57)$$

où  $r_0$  est le périastre du rayon lumineux. Pour une incidence rasante au Soleil, on trouve 1,75'' d'arc.

*La déviation des rayons lumineux était prédite par Einstein dès 1915. Elle fut mesurée avec succès au cours d'une éclipse totale du Soleil permettant les observations à incidence rasante, par deux expéditions coordonnées par Arthur Eddington (1882–1944) en 1919 (à Principe, golfe de Guinée et Sorbal, au Brésil). Il s'agit du 2<sup>e</sup> test de la relativité générale.*

4. La déviation des rayons lumineux engendre un retard dans la durée du trajet effectué. Entre un point de coordonnée radiale  $r_1$  et le périastre  $r_0$  du rayon lumineux, la durée en temps coordonnée est donnée, au premier ordre, par

$$\Delta t \approx \frac{\sqrt{r_1^2 - r_0^2}}{c} + \frac{2MG}{c^3} \left[ \ln \left( \frac{r_1 + \sqrt{r_1^2 - r_0^2}}{r_0} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0}} \right]. \quad (58)$$

*Le retard de durée du trajet d'ondes électromagnétiques entre Mars et la Terre du fait de la présence du Soleil est de 20  $\mu$ s sur une durée totale de 20 min. Proposé par Shapiro en 1964, cet effet homonyme a été mesuré pour la première fois en 1967 et constitue le 4<sup>e</sup> test de la relativité générale.*

ET AU DELÀ DE SCHWARZSCHILD ? Depuis 1916, de nombreuses solutions exactes ont été découvertes, qui ont largement contribué à la compréhension de la structure de la relativité générale. Très peu d'entre elles sont cependant des solutions d'intérêt pratique, alors même que la complexité des équations rend impossible leur résolution dans des cas aussi simples que le système binaire. Pour ces situations importantes, des méthodes perturbatives ont été développées. En parallèle, grâce à la puissance de calcul sans cesse croissante, la *relativité numérique* est née, et constitue un domaine d'activité aujourd'hui incontournable. Cette approche permet de déterminer la métrique d'espace-temps à partir d'une section spatiale donnée à un instant initial.

Les effets relativistes du champ de gravitation sont faibles au sein du système solaire et dans la plupart des situations. Après les premiers tests d'avant 1920, la relativité générale a connu une longue traversée du désert, à l'ombre de la physique quantique, de la physique nucléaire et de la physique des particules. Elle était considérée par la communauté scientifique comme une curiosité mathématique sans grand intérêt et sans applications.

Les années soixante furent le théâtre de la renaissance. Les découvertes d'objets astrophysiques (quasars, pulsars ...) et du rayonnement fossile à 3° K (qui confirmait l'hypothèse du Big Bang émise par Friedmann (1888–1925) dès 1922 pour l'évolution de l'univers à grande échelle), ont ravivé l'intérêt pour la gravitation relativiste. Les nouvelles techniques en optique (p. ex. le laser) et la précision des horloges atomiques<sup>31</sup> ont fait le reste.

Parallèlement aux avancées expérimentales et observationnelles, les propriétés théoriques et le formalisme de la relativité générale sont revenus sur le devant de la scène. Les méthodes globales ont fourni des résultats robustes pour la compréhension des trous noirs<sup>32</sup>, restée jusqu'alors fragmentaire et incomplète, et on commença à examiner de près les problèmes soulevés par la quantification de la gravitation.

### Trous noirs et ondes gravitationnelles

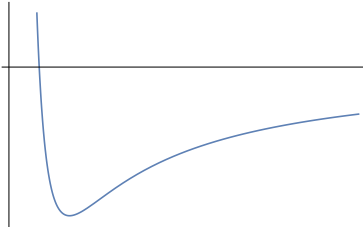
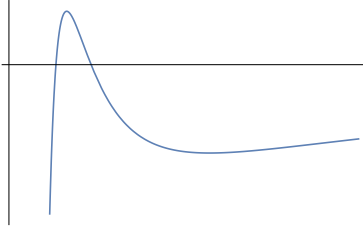
LA GRAVITÉ RELATIVISTE APPORTE SON LOT DE CURIOSITÉS et de phénomènes qui se distinguent qualitativement de la physique de Newton et qui sont néanmoins devenus expérimentalement accessibles.

En observant la métrique d'espace-temps de Schwarzschild donnée en (52), le lecteur attentif n'aura pas manqué de remarquer que le coefficient de  $dt^2$  s'annule lorsque  $r = r_g$ <sup>33</sup>. *Que se passe-t-il en ce rayon ?* On notera également dans l'expression du potentiel effectif (55) de la solution de Schwarzschild, que le terme de relativité générale en  $1/r^3$  est négatif, donc attractif, et domine, aux petits rayons, la force centrifuge répulsive en  $1/r^2$ . Tous les corps, même avec moment cinétique, risquent d'atteindre  $r = 0$  car *la barrière*

31. La dérive est de ces horloges est de l'ordre de  $10^{-16}$  s par seconde. Elles permettent de déceler une différence de hauteur de l'ordre de la dizaine de centimètres dans le champ de la pesanteur terrestre. A ce degré de précision, les corrections de relativité générale sont incontournables dans les systèmes de géolocalisation.

32. Des théorèmes généraux (dus entre autres à S. Hawking) sur les *singularités de courbure* apparaissant derrière les horizons des trous noirs (en  $r = 0$  pour Schwarzschild) ont joué un rôle crucial.

33. Rappel :  $r_g = 2MG/c^2$ .

FIGURE 5: Le potentiel effectif  $U_{\text{eff}}(r)$  du problème képlérien.FIGURE 6: Le potentiel effectif  $U_{\text{eff}}(r)$  du problème d'Einstein-Kepler.

centrifuge est de hauteur finie (voir fig. 5 et 6).

Le paradigme de Laplace (1749–1827) répond à cette question avec élégance et simplicité. Considérons pour cela un astre de masse  $M$  dans le cadre de la gravitation newtonienne. Les trajectoires paraboliques du problème de Kepler constituent la frontière entre les orbites elliptiques et les trajectoires hyperboliques qui s'échappent à l'infini. Pour ces trajectoires, l'énergie totale d'un corps de masse  $m$ , généralement donnée par

$$E = \frac{m}{2} \vec{v}^2 + U, \quad (59)$$

où  $U = m\Phi = -mMG/r$ , s'annule :  $E_{\text{parab.}} = 0$ . Cette relation permet de déterminer la vitesse d'échappement de l'objet lorsque celui-ci est situé à une altitude  $R$  (typiquement le rayon de l'astre). On trouve

$$v_{\text{échap.}} = \sqrt{\frac{2MG}{R}}. \quad (60)$$

En rupture avec la vision newtonienne, Laplace fait alors l'hypothèse audacieuse que les rayons lumineux seraient, eux aussi, susceptibles de subir les effets de la gravitation. Etant donnée la vitesse  $c$  de la lumière, celle-ci ne pourrait donc s'échapper de l'astre que si  $c \geq v_{\text{échap.}}$ .

*Il existerait donc un rayon critique en-dessous duquel la lumière cesserait d'être émise, et ce rayon est le rayon gravitationnel de Schwarzschild  $r_g$  !*

Et Laplace de conclure, en 1795 : « Il est dès lors possible que les plus grands corps lumineux de l'univers puissent, par cette cause, être invisibles. »

La vision moderne des trous noirs met précisément en évidence ce phénomène, c'est-à-dire l'existence d'un horizon d'événements, derrière lequel la lumière est piégée. Le renouveau de la relativité générale des années soixante a largement contribué à comprendre conceptuellement beaucoup de leurs propriétés. On est à présent convaincu, grâce à de multiples observations indirectes, qu'il en existe dans l'univers et en particulier au centre de notre galaxie, dans la région de Sagittarius A\*. Celui-ci aurait une masse de plus de quatre millions de masses solaires. L'étude des trous noirs est importante aussi pour confronter certaines observations aux prédictions de la relativité générale dans le régime de champ fort, là où les développements en puissances de  $r_g/r$  s'effondrent.

LES STATUTS DE L'ESPACE ET DU TEMPS sont équivalents dans les équations d'Einstein. On ne pouvait pas s'attendre à moins pour des équations relativistes et ceci répond à une critique due à Newton lui-même sur sa théorie de la gravitation. L'équation de Poisson n'ayant pas de dérivée temporelle, elle prévoit en effet que toute perturbation des sources est transmise instantanément sur le champ partout où le champ est défini, donc dans tout l'espace.

Les équations d'Einstein, comme les équations de Maxwell, sont hyperboliques et admettent donc des solutions qui se propagent. La mise en évidence des phénomènes ondulatoires dans les équations d'Einstein est plus difficile car celles-ci ne sont pas linéaires. Il convient donc de les linéariser, en les développant autour d'une forme quadratique proche de celle de Minkowski :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (61)$$

où les  $h_{\mu\nu}$  (et leurs dérivées  $\partial_\rho h_{\mu\nu}$ ) sont de petites corrections. Les composantes du tenseur d'Einstein sont – au premier ordre

$$G_{\lambda\nu} \approx \partial_\mu \partial_{(\lambda} \bar{h}_{\nu)}{}^\mu - \frac{1}{2} \square \bar{h}_{\lambda\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\lambda\nu} \partial_\mu \partial_\sigma \bar{h}^{\mu\sigma}, \quad (62)$$

où

$$h \equiv \eta^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma}, \quad \bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu}, \quad \bar{h} = -h. \quad (63)$$

Les indices sont montés avec la métrique  $\eta^{\mu\nu}$  et  $\square \equiv \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma$ .

Comme pour le champ électromagnétique, il faut imposer des conditions pour limiter les configurations de manière à s'assurer que des solutions d'apparence différente sont réellement distinctes et ne sont pas reliées par une transformation de coordonnées<sup>34</sup>. Pour la propagation dans le vide, on impose trois conditions qui épuisent la liberté :

- condition harmonique :  $\partial_\mu \bar{h}^\mu{}_\nu = 0$  ;
- condition sans trace :  $\bar{h}^\nu{}_\nu = 0$  ;
- condition transverse :  $\bar{h}_{\mu\nu} u^\nu = 0$ , pour un vecteur arbitraire constant et du genre temps de composantes  $u^\nu$ .

Sous ces conditions, les équations d'Einstein du vide sont

$$\square h_{\lambda\nu} = 0. \quad (64)$$

Les équations d'Einstein prévoient donc naturellement la propagation d'ondes gravitationnelles. Celles-ci ont les caractéristiques suivantes :

1. Elles possèdent, comme les ondes électromagnétiques, deux polarisations. En effet, les conditions de jauge imposées ci-dessus fournissent, pour une onde plane selon Oz et monochromatique,

$$h_{\mu\nu}(t, z) = A_{\mu\nu} \cos(\omega t - kz), \quad (65)$$

où  $\omega = kc$  et l'amplitude constante  $A_{\mu\nu}$  a la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & B & 0 \\ 0 & B & -A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (66)$$

2. Une rotation d'un angle  $\theta$  autour de l'axe Oz, produit dans l'amplitude l'effet suivant :

$$A'_\pm = e^{2i\theta} A_\pm, \quad (67)$$

34. Exactement comme en électromagnétisme avec l'invariance de jauge.

où  $A_{\pm} = A \mp iB$ . Donc l'onde gravitationnelle est d'hélicité 2, par opposition à l'onde électromagnétique, qui est d'hélicité 1 (le facteur 2 est absent dans ce cas).

3. Les ondes gravitationnelles sont des vibrations de la distance d'espace-temps et produisent donc des effets en principe mesurables, mais d'intensité très faible. L'appareillage conçu pour leur détection est un interféromètre, dont les bras, longs de plusieurs kilomètres, sont sensibles au signal de l'onde, qui produit dans les distances des effets relatifs de l'ordre de  $10^{-21}$ .

*Les ondes gravitationnelles ont été mises en évidence par interférométrie laser en automne 2015, dans l'expérience LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory). Leur détection, constitue le dernier test de la relativité générale, en suspens depuis exactement un siècle.*

LES ONDES SONT ÉMISES PAR DES SOURCES. En utilisant les équations d'Einstein avec sources (51), on peut déterminer l'onde créée loin de celles-ci. A l'ordre le plus bas, c'est le moment quadrupolaire qui contribue :

$$I^{ij}(t) = \int_{\mathcal{D}} d^3x x^i x^j \rho(\vec{r}, t), \quad (68)$$

où  $\rho(\vec{r}, t)$  est la densité de matière distribuée dans  $\mathcal{D}$ . On trouve pour l'onde :

$$\bar{h}^{ij}(r, t) \approx \frac{2G}{c^4 r} \left. \frac{d^2 I^{ij}}{dt^2} \right|_{t-r/c}. \quad (69)$$

Un système binaire est l'antenne typique, qui émet un signal dont on peut déterminer la forme très précisément<sup>35</sup> en fonction de la nature de ses membres : étoiles à neutrons, trous noirs ... Au cours de l'émission, les ondes emportent de l'énergie. Rappelons qu'un système binaire newtonien de masses  $m_{1,2}$ , donc de masse totale  $M = m_1 + m_2$  et de masse réduite  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ , a pour énergie

$$E = -\frac{\mu M G}{2R}, \quad (70)$$

où l'on fait l'hypothèse d'une orbite circulaire de rayon  $R$ . La pulsation de l'orbite est fournie par la 3<sup>e</sup> loi de Kepler :

$$\Omega = \sqrt{\frac{MG}{R^3}}. \quad (71)$$

Grâce au formalisme de la relativité générale, on peut déterminer l'amplitude de l'onde et la puissance rayonnée par la source. Se limitant à l'ordre dominant on trouve

$$A \approx \frac{4\mu M G^2}{c^4 R}, \quad P \approx \frac{32\mu^2 M^3 G^4}{5c^5 R^5}. \quad (72)$$

Le rayonnement gravitationnel a pour effet de diminuer l'énergie (négative) du système binaire, de diminuer son rayon orbital et d'accroître sa pulsation. Ces effets augmentent l'amplitude et la

35. Il faut pour cela aller au delà de l'ordre dominant, par diverses méthodes combinées, dont la relativité numérique.



puissance rayonnée, et le phénomène s'emballé aboutissant à la *coalescence* des composantes du système binaire. Imposant une équation de bilan,  $-\frac{dE}{dt} = P$ , on trouve l'évolution temporelle du rayon :

$$R(t) \approx 4 \left( \frac{\mu M^2 G^3}{5c^5} (t_0 - t) \right)^{1/4}, \quad (73)$$

et on déduit  $\Omega(t)$  en utilisant (71), qui diverge comme  $(t_0 - t)^{-3/8}$  lorsque  $t$  s'approche de  $t_0$ , instant de coalescence. Ces calculs doivent être affinés pour décrire correctement les phases finales, où la pulsation est très grande et le rayon très petit, nécessitant des corrections relativistes de plus en plus importantes.

*Le profil temporel de pulsation  $\Omega(t)$  est une signature typique d'émission d'ondes gravitationnelles. Les pulsars binaires fournissent, par leur rayonnement électromagnétique, le moyen de mesurer  $\Omega(t)$ . En 1974, Hulse et Taylor mirent en évidence un pulsar binaire dont les composantes sont chacune d'environ  $1,4 M_{\odot}$ . L'observation, au cours des années qui ont suivi, du comportement de ce pulsar, en parfait accord avec les prédictions de la relativité générale, avait fourni une preuve, indirecte mais indiscutable, de l'existence des ondes gravitationnelles.*



# Grandes questions

## Matière et énergie sombres

LA COSMOLOGIE RELATIVISTE apparaît en 1922 avec les équations de Friedmann, et les univers homogènes et isotropes de Lemaître (1894–1966), Robertson (1903–1961) et Walker (1909–2001), et avec elle, la théorie du Big Bang.

Toutes ces conclusions sont précoces, car aucune observation ne suggère une évolution temporelle comme celle à laquelle la relativité aboutit. Pourtant, quelques années plus tard, en 1929, Hubble (1889–1953) met en évidence l'expansion de l'univers par la mesure de la loi d'éloignement des galaxies en fonction de leur distance. Et en 1964, c'est le reliquat électromagnétique du contenu primordial de l'univers qui est observé par Penzias et Wilson, le *fond diffus cosmologique*.

De proche en proche est ainsi échafaudé le *modèle standard cosmologique* qui retrace toute l'histoire de l'univers. Ce modèle est presque parfait. Il décrit fidèlement toutes les observations sous deux hypothèses :

- il y a dans l'univers une composante d'*énergie sombre* qui représente les trois quarts de la totalité de masse-énergie, une forme de fluctuation du vide, encore mal comprise ;
- dans le quart restant, les trois quarts sont de la *matière sombre*, une matière au sens usuel mais dont la nature microscopique nous échappe.

## Quantification<sup>36</sup>

POUR NEWTON COMME POUR EINSTEIN les lois de la gravitation sont classiques, façonnées macroscopiquement et validées depuis les échelles cosmologiques jusqu'à la dizaine de microns. Même si cette limite reflète les difficultés techniques de mesurer la (trop faible) force gravitationnelle, une question se pose immanquablement : *peut-on étendre la validité des lois classiques de la gravitation au monde atomique ou subatomique ?* Si non, quelle loi observerait-on si l'on avait les moyens de sonder la force gravitationnelle à ces échelles<sup>37</sup> ou en deçà ?

36. Extrait de l'article *Gravitation, quantification, unification* publié par P.M. Petropoulos dans l'hebdomadaire *Le 1*, no 82 sur le Centenaire de la Relativité Générale, novembre 2015.

37. L'échelle typique pour la gravitation quantique est la longueur de Planck :  
 $\ell_{\text{Planck}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.16 \times 10^{-33} \text{ cm}.$

La formulation d'une théorie quantique de la gravitation est une nécessité pressentie par Einstein dès 1916. A l'instar de l'électromagnétisme, les lois de la gravitation doivent être révisées dans l'infiniment petit, sans quoi le mouvement des électrons autour des noyaux déstabiliserait l'atome qui rayonnerait son énergie, à présent sous forme d'ondes gravitationnelles.

A ces considérations de physique atomique se sont greffés au fil du temps d'autres arguments, exotiques et fascinants à la fois, en faveur d'une version quantique de la gravitation. Les propriétés des trous noirs ou encore la théorie du Big Bang révèlent le besoin d'une théorie microscopique, où les *gravitons* prendraient le pas sur les ondes gravitationnelles, à l'image des photons sur les ondes électromagnétiques.

LA QUANTIFICATION DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE D'EINSTEIN se heurte à des difficultés inhérentes à la description qu'elle fournit du champ de gravitation, identifiées dès les premiers travaux, dans les années 30. Malgré une activité intense et des acquis importants accumulés au fil du temps, la tâche est ardue, et une extension microscopique des lois de la gravitation est pour l'heure inaccessible. Soit parce qu'elle est incomplète ou insatisfaisante, dans les théories canoniques de gravitation quantique dont une émanation contemporaine est la gravité quantique à boucles. Soit parce qu'elle appelle à une modification radicale des lois fondamentales de toutes les interactions, dans les théories de supergravité ou de supercordes. Ces théories, où toutes les forces paraissent unifiées, défient à ce point l'intuition, que la dimension même de l'espace  $y$  est supérieure à trois.

### *Conclusion*

L'HISTOIRE de l'évolution des connaissances montre que, souvent, les petites zones d'ombre cachent de grands désordres. Comparaison n'est pas raison, mais les questions ouvertes à ce jour pourraient avoir des conséquences fondamentales sur notre vision de la gravitation, du monde quantique et de leur intersection.

# Bibliographie

## Manuels modernes

1. Sean M. Carroll, *An Introduction to General Relativity – Spacetime and Geometry*, Addison Wesley.
2. Nathalie Deruelle et Jean-Philippe Uzan, *Théories de la Relativité*, Belin.
3. James B. Hartle, *Gravity – An Introduction to Einstein’s General Relativity*, Addison Wesley.
4. David Langlois, *Relativité générale*, Vuibert.
5. Antony Zee, *Einstein Gravity in a Nutshell*, Princeton University Press.

## Ouvrages classiques

1. Lev Landau et Evguéni Lifchitz, *Physique Théorique vol. 2 Théorie des champs*, MIR.
2. Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler, *Gravitation*, W.H. Freeman and Co.
3. Robert M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press.
4. Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology – Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Wiley.

## Précis de géométrie différentielle

1. Boris Doubrovine, Anatoli Fomenko et Sergeï Novikov, *Géométrie contemporaine – méthodes et applications*, MIR.
2. Mikio Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Graduate student series in Physics.

## Notes de cours en ligne

Matthias Blau, *Lecture Notes on General Relativity*, University of Bern.