



---

**ÉCOLE POLYTECHNIQUE**  
CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

---

TERMS OF TRADE SHOCKS AND THE NON  
MONOTONIC ADJUSTMENT OF THE  
CURRENT ACCOUNT

Olivier CARDI

*February 2011*

Cahier n° 2011-04

---

**DEPARTEMENT D'ECONOMIE**

Route de Saclay  
91128 PALAISEAU CEDEX  
(33) 1 69333033

<http://www.enseignement.polytechnique.fr/economie/>  
<mailto:chantal.poujouly@polytechnique.edu>

---

# TERMS OF TRADE SHOCKS AND THE NON MONOTONIC ADJUSTMENT OF THE CURRENT ACCOUNT\*

Olivier CARDI

Université Panthéon-Assas ERMES

Ecole Polytechnique

## Abstract

This paper investigates both the dynamic and steady-state effects of unanticipated permanent and temporary terms of trade shocks within a two-good small open economy with habit formation and capital adjustment costs. A permanent terms of trade worsening induces a deficit-surplus current account sequence if habits adjust faster than the physical capital. Following a temporary shock, the open country experiences first a larger short-run current account deficit triggered by a greater decline in savings, followed by a surplus driven by the drop in investment. Numerical results show that the hump-shaped adjustment of real consumption can lead to overall welfare gains if habit persistence is strong enough, the shock is short-lived, and trade openness is not too high.

Keywords: Current account; Habit Formation; Temporary Shock; Terms of Trade.

JEL Classification: F41, E22, E21, F32.

---

\*I am deeply indebted to Stefan F. Schubert whose comments have been most helpful. Obviously, all remaining shortcomings are ours. Address correspondence: Université Panthéon-Assas Paris 2, ERMES, 12 Place du Panthéon, 75230 Paris Cedex 05. France. Phone: +33 1 44 41 89 64. Fax: +33 1 40 51 81 30. E-mail: [olivier.cardi@u-paris2.fr](mailto:olivier.cardi@u-paris2.fr).

# CHOCS DES TERMES DE L'ÉCHANGE ET AJUSTEMENT NON MONOTONE DU SOLDE COURANT

## Abstract

Cet article étudie les effets de chocs permanent et temporaire non anticipés des termes de l'échange dans un modèle d'équilibre général dynamique où les individus adoptent un comportement de type formation d'habitudes et l'accumulation de capital physique est soumise à des coûts d'ajustement. Une détérioration permanente des termes de l'échange entraîne une séquence déficit-excédent à condition que les habitudes de consommation s'ajustent plus rapidement que le capital physique. Lorsque le choc est temporaire, le solde courant se dégrade davantage sous l'effet d'une réduction plus marquée de l'épargne et s'améliore ensuite sous l'effet de la contraction de l'investissement. Les résultats numériques font apparaître que l'ajustement de la consommation réelle prend la forme d'une courbe en cloche ce qui permet d'aboutir à un gain de bien-être global à condition que le choc temporaire soit de courte durée et que l'ouverture internationale ne soit pas trop grande.

# 1 Introduction

The terms of trade is one of the most important relative prices in economics. The recent large swings of commodity prices and the consecutive movements in the terms of trade have attracted renewed attention over the last ten years. Changes in the ratio of the prices of exports to the prices of imports have an especially strong impact on the macroeconomic performance of small open economies, see e.g. Cashin and Mc Dermott [2002], Easterly et al. [1993], Otto [2003]. Such studies stress the need to understand the transmission mechanism of relative price shifts and the optimal response of the economy. A number of theoretical papers of the neoclassical type have explored the dynamic effects of terms of trade shocks, see e.g., Sen and Turnovsky [1989] and Servèn [1999]. Most of the analyses have been confined to small open economy models with time separable preferences, however.<sup>1</sup> In the present paper we consider time non separable preferences and investigate to what extent the neoclassical model with consumption habits account for the time-series evidence on the transmission mechanism of adverse terms of trade shocks.

It is striking to notice that over last thirty years, economists have devoted extensive research efforts to understanding the dynamic effects of terms of trade shocks within intertemporal-optimizing frameworks, see e.g., Obstfeld [1982], [1983], Ostry [1988], Sen and Turnovsky [1989], Servèn [1999]. In particular, Sen and Turnovsky [1989], Servèn [1999] introduce capital installation costs and analyze the transmission of terms of trade shocks to an economy that must make both consumption and investment decisions. A feature that these two papers have in common is that they consider time separable preferences which imply that the intertemporal marginal rate of substitution between consumption at date  $t + 1$  and consumption at date  $t$  does not depend on consumption at the other dates. As a consequence, the rate of time preference is fixed along a constant consumption path which yields a flat temporal path for consumption. Hence, consumption behavior plays a minor role so that the adjustment of the open economy hit by terms of trade shocks is mostly driven by investment dynamics, which considerably limit the predict power of the neoclassical model. In this contribution, we provide an extension of the Servèn's [1999] framework by allowing for the possibility that preferences are not time-separable but characterized by habit forming behavior, as in, e.g., Carrol, Overland and Weil [2000].

Our contribution has been motivated by empirical facts related to the effects of relative price changes. Leonard and Stockman [2002] and Otto [2003] document a non monotonic

---

<sup>1</sup>Mansoorian [1993], [1998] investigate the effects of adverse shifts in relative prices by considering a habit-forming behavior. His models and analysis are different in several key aspects. There is no capital accumulation and he restricts his study to permanent terms of trade of shocks. Additionally, the model is solved only analytically, not numerically. Finally, we use a specific form for utility to introduce the habit index, which allows us to derive more easily interpretable solutions.

adjustment of the current account, i.e. an adverse terms of trade shock leads initially to current account deficits and subsequently to current account surpluses, in both industrialized and developing countries. Furthermore, empirical evidence provided by Freund [2005] indicate that the current account decline is associated more with a drop in national savings and that the improvement in the current account comes primarily through reduced investment. Assuming time-separable preferences, the neoclassical model fails to account for the set of observations, notably for the initial decline in the current account and the non monotonic adjustment of the net foreign asset position. More precisely, by reducing the real permanent income, a terms of trade deterioration induces agents to lower consumption. Due to the assumption of the time separable preferences, the marginal propensity to consume is equal to one so that savings remain unchanged as consumption is immediately adjusted to a lower level. In the same time, as investment falls, the open economy runs a current account surplus over the transition.

The ability of the model to account for the evidence improves, however, once we allow for habit formation. First, while habit-forming agents also reduce consumption in response to the adverse terms of trade shock, they find it optimal to do so only moderately and, hence, savings decrease. While investment declines, numerical results show that for a weight of habits in utility in line with empirical estimates, the current account enters initially in deficit, triggered by the drop in savings. Second, we show analytically that as long as the stock of habits adjusts more rapidly than the stock of physical capital, the current account adjustment displays a reversal and thereby moves into surplus, due to the decline in investment. Beyond the ability of the model to account for empirical facts, such a neoclassical model with habit persistence in consumption and capital installation costs allows to formalize the intuition by Krugman [1989] related to the J-curve phenomenon.<sup>2</sup> Our explanation of the non monotonic adjustment of the current account remains distinct from that proposed by Backus, Kehoe et Kydland [1994]. They consider a two-country dynamic dynamic general equilibrium model where the terms of trade are endogenous and investment plays a pivotal role in driving the balance of trade adjustment. In our paper, both consumption decisions and investment choices play a major role as each ingredient is necessary to produce the initial worsening in the net foreign asset position together with the non monotonic adjustment of the current account.

We also investigate the effects of a temporary terms of trade deterioration of different degree of persistence. As long as the adverse relative price shift lasts a short period, we find that the current account enters in a larger deficit as households are induced to consume more

---

<sup>2</sup>“As recent experience has confirmed, the response of trade flows to the exchange rate take years, both because consumers are slow to change habits and, even more important, because many changes in supply and sourcing require long-term investment decisions” (Krugman [1989], p. 33).

and firms to raise capital investment. Once the shock ends, firms reduce investment so that the open economy experiences a current account surplus. In line with empirical evidence, the adjustment is the net foreign asset position is counter-cyclical: the current account enters in deficit while the investment boom boosts GDP and then moves into surplus as the decumulation of physical capital lowers output. In contrast to a model assuming time separable preferences, we find that consumption dynamics are hump-shaped. Numerical results show that such a consumption behavior leads to an overall welfare gain as long the shock is short-lived and trade openness is not too high.

The remainder of the paper is organized as follows. In section 2, we develop a small open economy version of the neoclassical model with habit formation and capital adjustment costs. Equilibrium dynamics are analyzed and the steady-state is discussed. Section 3 provides both an analytical and quantitative exploration on the role of habits for the transmission of permanent adverse terms of trade shocks. Section 4 investigates the effects of a temporary terms of trade deterioration and discusses the implications of the shock's duration. In section 5, we study the effects of a terms of trade worsening on welfare. Section 6 summarizes our main results and concludes.<sup>3</sup>

## 2 The Framework

We consider a small open economy that is populated by a constant number of identical households and firms that have perfect foresight and live forever. We normalize the number of households to one. The economy is completely specialized in the production of a final good which can be consumed domestically, invested or exported. The domestic good is an imperfect substitute of an imported good. The country is small in both world goods and capital markets. Hence, the economy faces given terms of trade denoted by  $p$ , i.e. the ratio of the price of exports to the price of imports, and exogenous world interest rate,  $r^*$ .

### 2.1 Households

At each instant, the representative household consumes domestic and foreign goods denoted respectively by  $x$  and  $z$ , which are aggregated by means of a positive, increasing, concave and linearly homogeneous function:

$$c(t) = c(x(t), z(t)), \tag{1}$$

where  $c(\cdot)$  is a subutility function.

---

<sup>3</sup>More details on the model as well as the derivations of the results which are stated below are provided in an Appendix which is available on request.

At any instant of time, households derive utility not only from their current real consumption  $c(t)$  but also from their current level of habits denoted by  $s(t)$ . Hence, the representative household maximizes the following objective function:

$$\int_0^{\infty} u [c(x(t), z(t)), s(t)] e^{-\delta t} dt, \quad (2)$$

where  $\delta$  is the consumer's discount rate. The habitual standard of living is defined as a distributed lag over past real consumption:

$$s(t) = \sigma \int_{-\infty}^t c(\tau) e^{-\sigma(t-\tau)} d\tau, \quad \sigma > 0. \quad (3)$$

where the parameter  $\sigma$  indexes the relative weight of recent consumption in determining the reference stock  $s$ . Differentiating equation (3) w. r. t. time gives the law of motion of habit stock:

$$\dot{s}(t) = \sigma [c(t) - s(t)]. \quad (4)$$

Intuitively, the larger  $\sigma$ , the greater the weight of consumption in the recent past in determining the stock of habits, and the faster the reference stock  $s$  adjusts to current expenditure  $c$ .

In line with Carroll, Overland and Weil [2000], we assume that the utility derived from current and past consumption takes an iso-elastic form. The felicity function for current and past consumption can be rewritten as

$$\phi \equiv u(c, s) = \frac{1}{1-\epsilon} \left[ \frac{c}{s^\gamma} \right]^{1-\epsilon} = \frac{1}{1-\epsilon} \left[ c^{1-\gamma} \left( \frac{c}{s} \right)^\gamma \right]^{1-\epsilon}, \quad (5)$$

where  $\epsilon > 0$  corresponds to the coefficient of relative risk aversion, and  $\gamma > 0$  is the weight of habits  $s$  in utility.<sup>4</sup> According to (5), agents derive utility from a geometric weighted average of absolute and relative consumption where  $\gamma$  is the weight of relative consumption. If  $\gamma = 0$ , the case of time separability in preferences obtains. Hence, the intertemporal marginal rate of substitution between consumption at date  $t + 1$  and consumption at date  $t$  does not depend on consumption at other dates which implies a fixed rate of time preference along a constant consumption path outside the steady-state. As long as the consumption-based real interest rate is fixed, the temporal path for consumption is flat. Hence, following a negative income shock, agents with time separable preferences find optimal to leave unchanged their wealth by adjusting immediately consumption to its long-run level. In other words, the marginal propensity to consume out of real permanent income (henceforth MPC) is equal

---

<sup>4</sup>The instantaneous utility function (5) increases with consumption,  $u_c(c, s) > 0$ , decreases with the stock of habits,  $u_s(c, s) \leq 0$  as long as  $\gamma > 0$ ; an increase in a uniformly maintained consumption level raises utility, i.e.  $u_c(c, c) + u_s(c, c) > 0$ , as long as  $0 \leq \gamma < 1$ ; the utility specification (5) is jointly concave w.r.t.  $c$  and  $s$  if  $\epsilon > \frac{1}{1-\gamma}$ . We assume that  $0 < \gamma < 1$  and  $\epsilon > \frac{1}{1-\gamma}$  to ensure that first-order conditions yield a maximum, see e.g. Alvarez-Cuadrado et al. [2004].

to one. If  $\gamma$  is positive, agents care about their relative consumption in deriving utility. The intertemporal marginal rate of substitution now depends on the stock of habits. If habit-forming agents experience a negative income shock, they anticipate that their usual standard of living will be lower in the long-run which drives down the marginal utility of future consumption. Consequently, the intertemporal marginal rate of substitution rises which is reflected by an increase in the slope of the indifference curves along a constant consumption path. Since individuals' impatience increases, agents are induced to reallocate consumption towards the present. Put differently, faced with a negative income shock, habit-forming agents find it optimal to reduce their consumption only moderately in the short-run and thereby to disave to sustain their original standard of living. Henceforth, the short-run MPC is smaller than one.

Work entails no disutility, and hence agents supply inelastically one unit of time of labor services for which they receive the wage rate  $w(t)$ . They hold the physical capital stock for which they receive  $qk$ . In addition, they accumulate internationally traded bonds,  $b(t)$ , that yields net interest rate earnings  $r^*b(t)$ . Denoting by  $a \equiv qk + b$  the stock of financial wealth measured in terms of the imported good, the flow budget constraint is equal to households' real disposable income less consumption expenditure  $p_c c$ :

$$\dot{a}(t) = r^*a(t) + w(t) - p_c(p(t))c(t). \quad (6)$$

where  $p_c$  is the consumption price index,  $p$  the relative price of the domestic good (or the terms of trade), and  $c$  real consumption.

The homogeneity of  $c(\cdot)$  allows a two-stage consumption decision: at the first stage, consumption is determined; intratemporal allocation between domestic goods and imports can be decided at the second stage; applying Shephard's lemma, consumption in domestic and foreign goods are:  $x = p'_c c$  and  $z = [p_c - pp'_c] c$ .

## 2.2 Firms

A large number of identical and perfectly competitive firms produces a final good. They use physical capital  $k$  and labor  $l = 1$ , according to a constant returns to scale production function,  $Y = F(k, l)$ , which is assumed to have the usual neoclassical properties of positive and diminishing marginal products, i.e.  $F_k > 0$ ,  $F_{kk} < 0$ . As in Gavin [1992], investment goods are produced by combining domestic goods  $J_x$  and imports  $J_z$  according to a constant-returns-to-scale function:

$$J(t) = J(J_x(t), J_z(t)), \quad (7)$$

We further assume that the installation of new investment goods involves costs denoted by  $\psi(\cdot)$  which are convex. For simplicity, the installation cost function takes a quadratic form,



i.e.

$$J = I(1 + \psi), \text{ with } \frac{\vartheta I}{2k} \quad (8)$$

where  $\vartheta > 0$  measures the slope of marginal installation costs.

Denoting by  $p_I$  the investment price index, the representative firm maximizes the present discounted value of its profit:

$$\int_0^\infty D(t)e^{-r^*t} dt = \int_0^\infty \left\{ pF(k, l) - wl - p_I(p) I \left[ 1 + \psi \left( \frac{I}{k} \right) \right] \right\} e^{-r^*t} dt, \quad (9)$$

where  $p_I J(t) = p_I I(t) [1 + \psi(I(t)/k(t))]$  represent total investment expenditure.

Investment  $I$  leads to capital accumulation:

$$\dot{k}(t) = I(t) - \delta_K k(t), \quad (10)$$

where  $0 \leq \delta_K < 1$  is a fixed depreciation rate.

As for consumption, the homogeneity of  $J(\cdot)$  allows a two-stage investment decision; at the first stage, total investment is determined; at the second stage, intra-temporal allocation allocation between domestic and capital imported goods leads to:  $J_x = p'_I J$  and  $J_z = [p_I - pp'_I] J$ .

### 2.3 Macroeconomic equilibrium

Performing the optimization, the macroeconomic equilibrium comprises the set of equations:

$$c^{-\epsilon} s^{-\gamma(1-\epsilon)} + \sigma \xi = p_c(p) \lambda, \quad (11a)$$

$$pF_l(k, 1) = w, \quad (11b)$$

$$q = p_I(p) \left[ 1 + \psi(I/k) + (I/k) \psi'(I/k) \right], \quad (11c)$$

$$\dot{\lambda} = 0, \quad \text{c. a. d.} \quad \lambda = \bar{\lambda}, \quad (11d)$$

$$\dot{\xi} = (\delta + \sigma) \xi + \gamma c^{1-\epsilon} s^{-[\gamma(1-\epsilon)+1]}, \quad (11e)$$

$$\dot{q} = (r^* + \delta_K) q - \left[ pF_k(k, 1) + p_I(p) (I/k)^2 \frac{\vartheta}{2} \right], \quad (11f)$$

$$\dot{b} = r^* b + pF(k, 1) - p_c(p) c - p_I(p) I \left[ 1 + \frac{\vartheta I}{2k} \right], \quad (11g)$$

together with accumulation equations (4) and (10), et transversality conditions:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\lambda} a \exp(-r^*t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \xi s \exp(-r^*t) = \lim_{t \rightarrow \infty} qk \exp(-r^*t) = 0, \quad (12)$$

where  $\lambda, \xi, q$  are the co-state variables associated with dynamic equations (6), (4), et (10). The first transversality condition (12) rules out the possibility that the home country to run up infinite debt or credit with the rest of the world.

Invoking the second transversality condition of (12), solving the differential equation (11e) yields:

$$\xi(t) = - \int_t^\infty \gamma c^{1-\epsilon} s^{-[\gamma(1-\epsilon)+1]} e^{-(\delta+\sigma)(\tau-t)} d\tau. \quad (13)$$

According to (13), the shadow price of habits is equal to the present discounted value of felicity stream induced by one additional unit of consumption habits, the reference stock depreciating at a rate  $\sigma$ .<sup>5</sup>

Solving forward (11f) and using (12), we obtain the standard expression of the shadow value of installed capital measured in foreign good units:

$$q(t) = \int_t^\infty \left\{ pF_k [k(\tau), 1] + p_I(p) \left( \frac{I}{k} \right)^2 \frac{\vartheta}{2} \right\} e^{-(r^*+\delta_K)(\tau-t)} d\tau. \quad (14)$$

The revenue induced by one additional unit of physical capital is equal to the marginal product of capital plus the reduction in the marginal installation cost for given  $I$ .

The first static optimality condition (11a) states that, along an optimal path, the contribution of an additional unit of consumption is equalized with the shadow value of wealth measured in consumption good units.<sup>6</sup> The second static optimality condition (11b) states that labor is paid its marginal product. According to (11c), the ratio of the market price of installed capital to the price of new capital goods must be equalized with the marginal cost of investment which implies the standard optimal investment rule:

$$\frac{I}{k} = \frac{1}{\vartheta} \left( \frac{q}{p_I} - 1 \right), \quad (15)$$

where the ratio  $q/p_I$  corresponds to the Tobin's  $q$ .

In an open economy model with a representative agent having perfect foresight, a constant rate of time preference and perfect access to world capital markets, we require that

$$\delta = r^*, \quad (16)$$

in order to generate an interior solution. This standard assumption made in the literature implies that the marginal utility of wealth,  $\lambda$ , will undergo a discrete jump when individuals receive new information and must remain constant over time from thereon. Because the model features the zero-root property, a temporary shift in relative price  $p$  has permanent or long-run effects, see e.g., Schubert and Turnovsky [2002].

## 2.4 Dynamic equation for Consumption

Differentiating the first-order condition (11a) w.r.t. time, substituting (4) and (11e) and eliminating  $\xi$  by using (11a), the dynamics of consumption are determined by the difference

<sup>5</sup>Since for given  $c$ , a rise in the reference stock reduces relative consumption  $c/s$ ,  $\xi$  is negative.

<sup>6</sup>In contrast to a model with time separable preferences, agents having a habit-forming behavior are aware that one additional unit of consumption raises the reference stock  $s$  which mitigates the increase in utility. This effect is reflected by the term  $\sigma\xi$  which is negative since  $\xi < 0$ .

between the world interest rate and the rate of time preference, denoted by  $\rho(t)$ :

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\epsilon} \left( 1 + \frac{\sigma\xi}{c^{-\epsilon}s^{-\gamma(1-\epsilon)}} \right) [r^* - \rho(c(t), s(t))], \quad (17)$$

where  $0 < \frac{1}{\epsilon} [1 + \sigma\xi c^\epsilon s^{\gamma(1-\epsilon)}] < 1/\epsilon$  stands for the short-run intertemporal elasticity of substitution (henceforth, IES) under time non separable preferences. The optimal path for consumption displays two key features. First, the slope of the consumption path determined by the short-run IES is smaller than the usual IES equal to the inverse of the relative risk aversion (i.e.  $1/\epsilon$ ). Second, the rate of time preference is variable over time and reads as:<sup>7</sup>

$$\rho(t) = \delta - \frac{c^{-\epsilon}s^{-\gamma(1-\epsilon)}}{p_c \bar{\lambda}} \left\{ \sigma\gamma\epsilon \left( \frac{c}{s} \right) - [\delta + \sigma((1-\gamma) + \gamma\epsilon)] + (\delta + \sigma) p_c \bar{\lambda} c^\epsilon s^{\gamma(1-\epsilon)} \right\}, \quad (18)$$

where  $\rho_c < 0$ ,  $\rho_s > 0$  (as long as  $\epsilon > 1$ ). If  $\gamma > 0$ ,  $\rho$  becomes endogenous. The reason is that habits gradually adjust to their steady-state value which in turn leads to a discrepancy between the current and future marginal utility of consumption. When the rate of time preference exceeds the world interest rate, the agent is encouraged to reallocate consumption towards the present.

## 2.5 Equilibrium Dynamics and Formal Solutions

By substituting first the short-run static solution for investment (15) into (10) and (11f), linearizing in the neighborhood of the steady-state, and denoting steady-state values with a tilde, the dynamic system which comprises four equations (4), (17), (10), and (11f) writes in matrix form:

$$\begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{c} \\ \dot{k} \\ \dot{q} \end{pmatrix}^T = J \begin{pmatrix} s(t) - \tilde{s} \\ c(t) - \tilde{c} \\ k(t) - \tilde{k} \\ p(t) - \tilde{p} \end{pmatrix}^T, \quad (19)$$

where  $J$  is given by:

$$J \equiv \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{\epsilon} \{ (1-\epsilon) [\delta + \sigma(1-\gamma)] - \sigma\epsilon \} & (\delta + \sigma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_K & \frac{\tilde{k}}{\partial p_I} \\ 0 & 0 & -pF_{kk} & (r^* + \delta_K) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

The assumption of inelastic labor supply allows us to keep analytical tractability as it makes consumption decisions independent from investment choices. The linearized system can be split into two subsystems which facilitate the study of equilibrium dynamics. Since the number of predetermined variables ( $s$  et  $k$ ) is equal to the number of stable eigenvalues,

<sup>7</sup>Following Epstein [1987], the rate of time preference is defined as the opposite of the rate of change of the present discounted value of the marginal utility stream of consumption:

$$\rho(t) \equiv - \frac{d}{dt} \log \left[ (u_c(c, s) + \sigma\xi) e^{-\delta t} \right] \Big|_{c(t)=0}.$$

where  $u_c(c, s) + \sigma\xi = c^{-\epsilon}s^{-\gamma(1-\epsilon)} + \sigma\xi = p_c \bar{\lambda}$ .

denoted by  $\mu_1$  et  $\chi_1$ , and the number of jump variables ( $c$  et  $q$ ) is equal to the number of unstable eigenvalues, denoted by  $\mu_2$  et  $\chi_2$ , hence there exists a unique two-dimensional stable path converging towards the long-run equilibrium. Eigenvalues satisfy the following properties:<sup>8</sup>

$$\mu_1 < 0 < r^* < \mu_2, \quad \chi_1 < 0 < r^* < \chi_2. \quad (22)$$

Using standard procedures, we obtain general formal solutions:

$$s(t) - \bar{s} = A_1 e^{\mu_1 t} + A_2 e^{\mu_2 t}; \quad c(t) - \bar{c} = \omega_1^1 A_1 e^{\mu_1 t} + \omega_1^2 A_2 e^{\mu_2 t}, \quad (23a)$$

$$k(t) - \bar{k} = B_1 e^{\chi_1 t} + B_2 e^{\chi_2 t}, \quad q(t) - \bar{q} = \varpi_2^1 B_1 e^{\chi_1 t} + \varpi_2^2 B_2 e^{\chi_2 t}, \quad (23b)$$

where  $\omega_2^i = \left(\frac{\sigma + \mu_i}{\sigma}\right) > 0$  (for  $i = 1, 2$ ) and  $\varpi_2^i = \frac{\vartheta[p_I(\delta_K + \chi_i)]}{k}$  are eigenvectors, with  $\varpi_2^1 < 0$  et  $\varpi_2^2 > 0$ .

By substituting first the short-run static solution for investment (15), linearizing (11g), substituting general formal solutions (23), solving, we obtain the general solution for the stock of foreign assets:

$$b(t) = \tilde{b} + \left[ (b_0 - \tilde{b}) + p_I B_1 + p_I B_2 + \Upsilon^1 A_1 + \Upsilon^2 A_2 \right] e^{r^* t} - p_I B_1 e^{\chi_1 t} - p_I B_2 e^{\chi_2 t} - \Upsilon^1 A_1 e^{\mu_1 t} - \Upsilon^2 A_2 e^{\mu_2 t}. \quad (24)$$

Invoking the transversality condition (12) yields the stable path for  $b(t)$ :

$$b(t) = \tilde{b} - p_I B_1 e^{\chi_1 t} - \Upsilon^1 A_1 e^{\mu_1 t}, \quad \text{with} \quad \Upsilon^1 \equiv \frac{p_c(\sigma + \mu_1)}{\sigma(\mu_1 - r^*)} < 0. \quad (25)$$

Since the stable path is two-dimensional, the speed of convergence of the stock of foreign assets at any point of time is a weighted average of the two stable eigenvalues. Over time, the weight of the smaller (more negative) eigenvalue declines. Hence, the asymptotic speed of convergence of  $b(t)$  (i.e. as  $t \rightarrow \infty$ ) is dictated by the larger of the two stable (negative) eigenvalues. Under some conditions that will be determined later, the current account adjustment can be non monotonic.

## 2.6 Steady-State

The steady-state of the economy is defined to be the macroeconomic equilibrium with  $\dot{s} = \dot{c} = \dot{k} = \dot{q} = 0$ . The system jointly determine the long-run values for  $\bar{c}$ ,  $\bar{s}$ ,  $\bar{q}$ ,  $\bar{k}$ ,  $\bar{J}$ ,  $\bar{b}$ , and  $\bar{\lambda}$ .

---

<sup>8</sup>The roots are given by:

$$\mu_i \equiv \frac{1}{2} \left\{ \delta \pm \sqrt{\delta^2 + \frac{4\sigma}{\epsilon} [\gamma + \epsilon(1 - \gamma)] [\delta + \sigma(1 - \gamma)]} \right\} \leq 0, \quad i = 1, 2, \quad (21a)$$

$$\chi_i \equiv \frac{1}{2} \left\{ r^* \pm \sqrt{(r^* + 2\delta_K)^2 - 4 \frac{\tilde{k} p F_{kk}}{\vartheta p_I}} \right\} \leq 0, \quad i = 1, 2. \quad (21b)$$

To obtain closed-form solutions, we assume that the production function takes a Cobb-Douglas form, i.e.  $Y = k^{\alpha_K}$ . Combining (11f) and (11c), the steady-state level of capital is equal to:

$$\tilde{k} = \left[ \frac{p\alpha_K}{p_I(r^* + \delta_K)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_K}}. \quad (26)$$

Hence a drop in  $p$  lowers the steady-state value of  $k$  by reducing the marginal product of capital measured in terms of the foreign good. Total investment expenditure, including installation costs, i.e.  $\tilde{J} = \delta_K \tilde{k} [1 + \frac{\vartheta}{2} \delta_K]$ , are reduced as well.

Setting  $\dot{c} = 0$  and using the fact that real consumption coincides with the habit stock once economy reaches the long-term equilibrium enables us to derive the steady-state level of real consumption:

$$\tilde{c} = \left[ \left( \frac{\delta + \sigma}{\delta + \sigma(1 - \gamma)} \right) p_c(p) \bar{\lambda} \right]^{-\nu}, \quad (27)$$

where  $\nu = \frac{1}{[\gamma + \epsilon(1 - \gamma)]}$  corresponds to the long-run IES. Denoting by a hat the rate of change relative to initial steady-state, eq. (27) can be rewritten as  $\hat{c} = -\nu \hat{\lambda} - \nu \alpha_c \hat{p}$ . This equation shows that consumption is more sensitive to a change in the terms of trade  $\hat{p}$  than in the case of time separable preferences and reacts more strongly to it, the less open an economy, i.e. the larger  $\alpha_c$ . The reason is a larger long-run IES,  $\nu > 1/\epsilon$ .<sup>9</sup> Moreover, consumption reacts more to a change in the shadow value of wealth  $\hat{\lambda} > 0$ . Hence, following a fall in the real permanent income, agents who care about past consumption lower real consumption by a larger amount than individuals having standard preferences. The reason is facing a negative income shock, habit-forming agents are willing to decumulate financial wealth to sustain their original standard of living. To ultimately satisfy the intertemporal solvency condition, habit-forming consumers must reduce sizeably consumption. The closer to one the weight of habits in utility  $\gamma$ , the more agents care about past consumption, the greater the fall in savings following a negative income shock, and thereby the larger the long-run decline in real consumption.

Steady-state consumption together with long-run physical capital determine the steady-state value of the stock of traded bonds  $\tilde{b}$ :

$$r^* \tilde{b} + pF(\tilde{k}, 1) - p_c(p) \tilde{c} - p_I \tilde{J} = 0. \quad (28)$$

Finally, the linearized version of the intertemporal solvency condition determines the equilibrium value of the marginal utility of wealth  $\bar{\lambda}$ :

$$(b_0 - \tilde{b}) = -p_I (k_0 - \tilde{k}) - \Upsilon^1 (s_0 - \tilde{s}), \quad (29)$$

---

<sup>9</sup>By noting that habits coincide with real consumption in the long run, setting  $c = s$  into the iso-elastic function (5) above yields a long-run IES denoted by  $\nu$  equal to  $\frac{1}{[\gamma + \epsilon(1 - \gamma)]}$  which is higher than the standard IES  $1/\epsilon$  as long as  $\epsilon > 1$ . By contrast, the reference stock is fixed over a short interval of time. Hence, the short-horizon and long-horizon elasticities do not coincide as long as  $\gamma > 0$ .

where  $\Upsilon^1 < 0$ . A steady-state decrease in habits (increase in capital) causes a decumulation of the stock of foreign assets by inducing a drop in savings (a rise in investment). An additional feature of the eq. (29) is the dependency of the steady-state to initial conditions which implies that temporary shocks have long-run effects.

Due to the zero root property, the steady-state can be solved in two stages. In a first step, we solve (27)-(28) for  $\tilde{s}$ ,  $\tilde{c}$ ,  $\tilde{k}$ ,  $\tilde{q}$ , and  $\tilde{b}$  in terms of the shadow value of wealth  $\bar{\lambda}$  and the exogenous terms of trade,  $p$ :<sup>10</sup>

$$\tilde{s} = \tilde{c} = m(\bar{\lambda}, p), \quad m_{\bar{\lambda}} < 0, \quad m_p < 0, \quad (30a)$$

$$\tilde{k} = k(p), \quad k_p > 0, \quad (30b)$$

$$\tilde{q} = p_I(p), \quad p'_I > 0, \quad (30c)$$

$$\tilde{b} = v(\bar{\lambda}, p), \quad v_{\bar{\lambda}} < 0, \quad v_p < 0. \quad (30d)$$

The *wealth effect*, reflected by higher  $\bar{\lambda}$ , induces agents to lower consumption; then, we have  $m_{\bar{\lambda}} < 0$ . As imports fall, the consecutive improvement in the trade balance must be offset by a drop in the stock of foreign bonds, as reflected by  $v_{\bar{\lambda}} < 0$ .

The *terms of trade effect* is reflected by the drop in the relative price  $p$ , i.e.  $dp < 0$ . The consecutive decrease in the marginal cost of consumption triggered by the fall in the consumption price index induces agents to consume more, i.e.  $m_p dp > 0$ . In the same time, the decline in  $p$  lowers the marginal product of capital which leads firms to cut investment expenditure, i.e.  $k_p dp < 0$ , though the terms of trade deterioration also reduces the capital user cost by lowering the investment price index. As a terms of trade deterioration raises consumption  $\tilde{c}$  and drives down GDP  $\tilde{Y}$ , net exports fall, i.e.  $(\tilde{Y} - \tilde{x} - \tilde{J}_x) dp < 0$ . Hence, the open economy must accumulate foreign bonds in the long-run, i.e.  $v_p dp > 0$ .

After a permanent shock, steady-state changes are driven by both the *wealth effect* and the *terms of trade effect*. Following a temporary shift in  $p$ , steady-state changes are only driven by the *terms of trade effect*.

In a second step, substituting (30) into the intertemporal solvency condition (29) yields the equilibrium value of the marginal utility of wealth:

$$\bar{\lambda} = g(s_0, k_0, b_0, p), \quad \lambda_s \geq 0, \quad \lambda_k < 0, \quad \lambda_b < 0, \quad \lambda_p < 0. \quad (31)$$

### 3 The Effects of a Permanent Terms of Trade Deterioration

In this section, we explore the macroeconomic effects of an adverse shift in the terms of trade. We first discuss analytically the implications of a permanent terms of trade of shock,

<sup>10</sup>Partial derivatives of (30) and (31) can be found in an Appendix.

emphasizing how habits modify the transmission mechanism of relative price changes. Then, to illustrate the quantitative role of habits, we solve the model numerically.

### 3.1 An Analytical Exploration

In this subsection, we explore analytically the macroeconomic effects of a permanent terms of trade deterioration. We suppose that at time  $t = 0$ , the open economy experiences an unexpected and permanent decline in the relative price of exports  $p$ .

#### Long-Term Effects

As stressed previously, due to the zero-root property, steady-state changes can be decomposed into a *wealth effect* and a *terms of trade effect*. The former originates from the drop in real permanent income while the latter reflects changes in the purchasing cost of consumption and capital goods. Their respective impacts are summarized in Table 1. Without loss of generality, for clarity purpose, we set the rate of capital depreciation to zero to solve analytically the model.<sup>11</sup>

Consider first the impact on consumption and saving. As long as the small open economy is a net exporter of the domestic good, i.e.  $\tilde{Y} - \tilde{x} > 0$ , the real permanent income decreases. While the *terms of trade effect* exerts a positive impact on consumption by reducing the cost of consumption goods, the *wealth effect* originating from the drop in the real permanent income predominates. The long-run fall in consumption is given by:

$$\left. \frac{d\tilde{c}}{dp} \right|_{perm} = \left. \frac{d\tilde{s}}{dp} \right|_{perm} = \frac{\sigma(\mu_1 - r^*)}{\mu_1(\sigma + r^*)} \frac{(\tilde{Y} - \tilde{x})}{p_c} > 0, \quad \left. \frac{d\tilde{c}}{dp} \right|_{\gamma=0} = \frac{(\tilde{Y} - \tilde{x})}{p_c} > 0. \quad (32)$$

where superscript  $\gamma = 0$  refers to the case without habits. As long as  $\gamma > 0$ , then  $\sigma + \mu_1 > 0$  which implies that  $\frac{\sigma(\mu_1 - r^*)}{\mu_1(\sigma + r^*)} > 1$ . Hence, while agents with time separable preferences cut their real expenditure by the same amount than the drop in the real permanent income equal to  $\frac{(\tilde{Y} - \tilde{x})}{p_c} dp < 0$ , habit-forming individuals reduce consumption more. The closer to  $\gamma$  to unity, the more agents care about past consumption, the smaller the speed of adjustment  $|\mu_1|$  and thereby the larger the long-run fall in consumption as agents disave more along the transitional path.

---

< [Please insert Table 1 about here](#) >

---

Consider now the impact in the capital stock and its shadow value. If capital goods are not fully domestic, i.e.  $1 - \alpha_I > 0$ , the decline in the marginal product of capital more than offsets the fall in the capital user cost. As a consequence, the market price of installed

---

<sup>11</sup>Obviously, this assumption is relaxed in the numerical analysis.

capital  $\tilde{q}$  falls which induces firms to decumulate physical capital in the long-run, as shown formally below:

$$\left. \frac{d\tilde{k}}{dp} \right|_{perm} = \frac{\tilde{k} (1 - \alpha_I)}{p (1 - \alpha_K)} > 0, \quad (33)$$

where  $\alpha_K$  is the capital income share in output.<sup>12</sup> As summarized in Table 2, steady-state changes of  $\tilde{q}$  and  $\tilde{k}$  are only affected by the *terms of trade effect*, due to the assumption of inelastic labor supply.

The long-run adjustment of the stock of foreign bonds is the result of two opposite effects. To see it formally, differentiate the intertemporal solvency condition (29) w.r.t. the relative price  $p$ :

$$\left. \frac{d\tilde{b}}{dp} \right|_{perm} = \left. \frac{d\tilde{a}}{dp} \right|_{perm} - p_I \left. \frac{d\tilde{k}}{dp} \right|_{perm} > 0, \quad \text{with} \quad \left. \frac{d\tilde{a}}{dp} \right|_{perm} = -\Upsilon^1 \left. \frac{d\tilde{s}}{dp} \right|_{perm} > 0, \quad (34)$$

where  $\Upsilon^1 < 0$ . From the second term in the RHS of (34), the long-run decumulation of physical capital raises the stock of traded bonds by triggering a current account surplus along the transitional path. However, as habit-forming agents wish to sustain their original standard of living, they reduce their savings which in turn exerts a negative impact on the net foreign asset position. According to empirical findings provided by Otto [2003], the current account initially worsens after a terms of trade deterioration. A necessary but not sufficient condition for an initial current account deficit is that the drop in the stock of financial wealth more than offsets the reduction of investment expenditure. Formally, we have to set:<sup>13</sup>

### Assumption 1

$$\left. \frac{d\tilde{a}}{dp} \right|_{perm} > p_I \left. \frac{d\tilde{k}}{dp} \right|_{perm}. \quad (35)$$

If preferences are time separable, then the stable root  $\mu_1^{\gamma=0}$  is equal to  $-\sigma$  so that the stock of financial wealth remains unaffected and inequality (35) does not hold. By contrast, as long as the weight of habits  $\gamma$  is large enough, i.e. sufficiently close to one as empirical evidence suggest, savings fall more than investment in the long-run so that foreign assets are decumulated and inequality (35) holds.

### Dynamic Effects

We now turn to the dynamic effects of an adverse terms of trade shift. Without habits, the short-run MPC is equal to unity such that at the time when the terms of trade shock

<sup>12</sup>We used the fact that  $-\frac{F_{kkk}}{k} = 1 - \alpha_K$  to compute (33).

<sup>13</sup>Inequality (35) can be rewritten as:

$$-\frac{(\sigma + \mu_1)}{\mu_1(\sigma + r^*)} (\tilde{Y} - \tilde{x}) > -\frac{p_I \tilde{k} (1 - \alpha_I)}{p (1 - \alpha_K)}.$$

The LHS term rises as  $\gamma$  approaches unity since  $|\mu_1|$  falls. To obtain the LHS term, we linearize the accumulation equation of financial wealth (6) in the neighborhood of the steady-state, we substitute the formal solution for  $c(t)$ , solving, invoke the No-Ponzi-Game condition, and differentiate w.r.t.  $p$ .



hits the open economy, real consumption falls by the same amount than the decline in real disposable income, hence leaving savings unaffected. As firms lower investment, the current account improves on impact and stays in surplus along the transitional path.

As long as agents care about past consumption in deriving utility, the short-term MPC becomes smaller than unity. The initial response of consumption is given by:

$$\left. \frac{dc(0)}{dp} \right|_{perm} = -\frac{\mu_1}{\sigma} \left. \frac{d\tilde{c}}{dp} \right|_{perm} = \left( \frac{r^* - \mu_1}{r^* + \sigma} \right) \frac{(\tilde{Y} - \tilde{x})}{p_c} > 0, \quad (36)$$

where the term  $0 < \left( \frac{r^* - \mu_1}{r^* + \sigma} \right)$  corresponds to the short-run MPC. As long as  $\gamma > 0$ , then  $\sigma > -\mu_1$ ; hence, the short-run MPC is smaller than one. As a consequence, real consumption initially falls but by less than in the long-run. The explanation is that, facing a fall in their real permanent income, habit-forming consumers are aware that their standard of living will be lower at the steady-state, which drives down the marginal utility of future consumption. At the time the adverse relative price shift hits the economy, i.e. at time  $t = 0$ , the stock of habits remains fixed. Therefore, the marginal utility of current consumption exceeds the marginal utility of future consumption. The consecutive increase in the intertemporal marginal rate of substitution provides an incentive for the intertemporal reallocation of consumption expenditure towards the present.

Regarding investment behavior, its initial reaction is given by:<sup>14</sup>

$$\left. \frac{dI(0)}{dp} \right|_{perm} = -\chi_1 \frac{\tilde{k} (1 - \alpha_I)}{p (1 - \alpha_K)} > 0. \quad (37)$$

According to (38), whether preferences are time separable or not, the terms of trade deterioration triggers a decline in investment. The reason is that the fall in  $p$  lowers the marginal product of capital in terms of foreign goods below its real user cost, and more so the higher the import content of investment expenditure ( $1 - \alpha_I$ ).

Using the fact that  $b(t) \equiv a(t) - q(t)k(t)$ , linearizing and differentiating w.r.t. time, we obtain an expression for current account balance:

$$ca(t) = \dot{b}(t) = \mu_1 (a_0 - \tilde{a}) e^{\mu_1 t} - \chi_1 p_I (k_0 - \tilde{k}) e^{\chi_1 t}. \quad (38)$$

The dynamics for the capital stock depend solely on  $|\chi_1|$ , while that of consumption depend solely on  $|\mu_1|$ . Inspection of the solution for net foreign assets (38) shows that the current account depends on both  $|\chi_1|$  and  $|\mu_1|$ . Evaluating (38) at time  $t = 0$  and differentiating w.r.t.  $p$ , we get the initial reaction of the current account:

$$\left. \frac{dca(0)}{dp} \right|_{perm} = -\mu_1 \left. \frac{d\tilde{a}}{dp} \right|_{perm} + \chi_1 p_I \left. \frac{d\tilde{k}}{dp} \right|_{perm}. \quad (39)$$

<sup>14</sup>Differentiating the stable solution for  $k(t)$  w.r.t. time, evaluating at time  $t = 0$  and differentiating w.r.t.  $p$  leads to (38).

The first term on the RHS reflects the drop in savings and the second term the decline in investment. While assumption 1 is necessary to produce an initial current account deficit, inspection of (39) shows that this condition is not sufficient. More precisely, the drop in savings on impact must be large enough to counteract the initial decline of investment. Hence, in addition to assumption 1, we further assume that the speed of adjustment of the stock of financial wealth driven by the stock of habits and described by  $|\mu_1|$  must be higher than the speed of adjustment of physical capital given by  $|\chi_1|$ :

**Assumption 2**

$$\mu_1 < \chi_1 < 0. \tag{40}$$

Since  $|\chi_1|$  decreases with capital installation costs, the parameter  $\vartheta$  (see eq. (8)) must be large enough for the inequality (40) to hold.

**3.2 A Quantitative Exploration**

We now analyze the effects of a permanent terms of trade deterioration quantitatively. For this purpose we solve the model numerically. In the following we thus first discuss parameter values before turning to the dynamic effects of an adverse relative price shift.

**Baseline Parametrization**

Table 2 summarizes the baseline calibration. Consumption and capital goods are aggregated by means of a CES function:

$$c(x, z) = \left[ \varphi_c^{\frac{1}{\phi_c}} z^{\frac{\phi_c-1}{\phi_c}} + (1 - \varphi_c)^{\frac{1}{\phi_c}} x^{\frac{\phi_c-1}{\phi_c}} \right]^{\frac{\phi_c}{\phi_c-1}}, \quad J(J_x, J_z) = \left[ \varphi_I^{\frac{1}{\phi_I}} J_z^{\frac{\phi_I-1}{\phi_I}} + (1 - \varphi_I)^{\frac{1}{\phi_I}} J_x^{\frac{\phi_I-1}{\phi_I}} \right]^{\frac{\phi_I}{\phi_I-1}}, \tag{41}$$

where  $0 < \varphi_c < 1$  et  $0 < \varphi_I < 1$  are the weights of imports in overall consumption and investment bundles;  $\varphi_c$  and  $\varphi_I$  are set to target an import content of consumption  $(1 - \alpha_c)$  and investment  $(1 - \alpha_I)$  of 20% and 40%, respectively, which correspond roughly to the ratios documented by Corsetti and Müller [2006]. As import content of both consumption and investment expenditure vary sizeably across countries, we conduct a sensitivity analysis and set  $\varphi_c$  and  $\varphi_I$  to 0.3 and 0.6 respectively. Parameters  $\phi_c > 0$  et  $\phi_I > 0$  correspond to the intratemporal elasticity of substitution between domestic goods and imports for consumption and investment; following Pakko [2003], we set  $\phi_c$  and  $\phi_I$  to 1.5.

The world interest rate  $r^*$ , is set at 5%. The production function takes a Cobb-Douglas form,  $Y = F(k) = k^{\alpha_K}$ , with an output share of capital income,  $\alpha_K$ , set to 1/3. We set  $\delta_K$  at 5% so as to be consistent with a ratio investment-GDP roughly equal to 20%.<sup>15</sup> Finally, following Servèn [1999], the slope  $\vartheta$  of marginal capital installation costs has been set to 5.

---

<sup>15</sup>For the baseline calibration, the consumption expenditure-GDP ratio is 55%.

---

< Please insert Table 2 about here >

---

The critical parameters pertain to the weight of habits in utility,  $\gamma$ , and the speed of adjustment,  $\sigma$ , in the determination of the reference stock. We set  $\gamma$  at 0.8 in line with empirical estimates documented by Gruber [2002] and Sommer [2007]. The relative-risk aversion parameter  $\epsilon$  is set at 2.5 which implies a long-run IES of  $\nu = \frac{1}{\gamma + \epsilon(1-\gamma)} = 0.77$  falling in the range of 0.5 and 1 of empirical estimates, see e.g., Cashin and McDermott [2003]. Finally, we set  $\sigma$  at 0.6.

### Long-Term Effects

We assume that the relative price of exports  $p$  falls unexpectedly and permanently by 10%. In panel A of Table 3 we report numerical results for long-term effects. Contrasting the case of habits (i.e.  $\gamma = 0.8$ ) with the case of time separable preferences (i.e.  $\gamma = 0$ ), in line with model's predictions, consumption falls by a larger amount in the former case (-5.4% of initial GDP against -3.7%) as agents decumulate financial wealth over the transition and must ultimately satisfy the intertemporal solvency condition in the long-run. Since consumption and investment decisions are independent, habit persistence does not affect investment behavior. As stressed previously, the terms of trade deterioration induces firms to decumulate physical capital: investment drops by 1.1% of initial GDP in the long-run.

Interestingly, raising the import content of consumption from 0.2 to 0.3 amplifies considerably the drop in real expenditure, regardless of the type of preferences, as shown in the second line of Table 3. The reason is that the *terms of trade effect* driving down the consumption price index plays a smaller role as the domestic content in consumption is lower. In addition, the real permanent income, which is proportional to  $(\tilde{Y} - \tilde{x} - \tilde{J}_x)$ , decreases more. The consecutive larger *wealth effect* lowers further steady-state consumption. Finally, raising the import content of investment from 40% to 60% moderates the drop in the capital user cost which results in a larger fall in investment.

### Dynamic Effects

We now turn to the short-run effects of the terms of trade deterioration which are reported in Panel B of Table 3. The transitional paths of key variables under the baseline scenario are displayed in Figures 1. The responses of consumption, investment, savings, current account and net exports are expressed in percent of initial steady-state output. Horizontal axes measure years.

As shown in the first line of panel B of Table 3, the drop in consumption shrinks from -3.7% to -1.9% if we move from the time-separable preferences to the habits specification of preferences. The reason is that in the latter case, the rate of time preference increases on

impact which induces agents to reallocate consumption towards the present. The gradual decline in the reference stock over time reduces  $\rho$  which falls monotonically. Over the transition, the rate of time preference exceeds the world interest which induces a decreasing temporal path for consumption, as shown in the first line of Figures 1.

Before analyzing the role of habits in shaping the short-run current account dynamics in response to a permanent fall in the terms of trade, we recall the set of observations established by empirical studies. First, The current account enters in deficit on impact and its adjustment displays a deficit-surplus sequence after an exogenous drop in the relative price of exports, see e.g., Leonard and Stockman [2002] and Otto [2003]. Second, the current account deficit episode is associated with a drop in savings while the current account surplus episode is triggered by the drop in investment, see e.g., Freund [2005].

The second line of Figures 1 displays the dynamic adjustments of investment (dashed-dotted line), savings (dotted line), and the current account (solid line). We find that the neoclassical model is unable to account for a decline of the current account in the case of time separable preferences. In particular, the decline in investment drives the current account into surplus as savings remain unaffected. By contrast, in the presence of habits, an adverse relative price shift drives down investment by -2.3% of initial GDP and worsens the external asset position by -0.6% as savings fall dramatically by -2.9%. Hence, for our parametrization, both assumptions 1 and 2 are satisfied. In line with evidence provided by Freund [2005], the decline in the net foreign asset position is driven the decrease in savings. Additionally, the second line of Figures 1 shows that the current account adjusts non monotonically. The reason is that habits and thereby savings adjust more rapidly than investment. As a consequence, there exists a time  $\check{t}$  such that saving is equalized with investment along the trajectory, i.e.  $-\Upsilon^1 \dot{s}(\check{t}) = p_I I \dot{k}(\check{t})$ . For the baseline parametrization,  $\check{t}$  is equal to two years and a half. For  $t < \check{t}$ , the drop in savings more than offsets the fall in investment so that the open economy experiences a deficit. For  $t > \check{t}$ , savings become smaller than investment which results in a current account surplus. As capital is decumulated, the current account surplus is associated with a decline in GDP, in line with evidence reported by Leonard and Stockman [2002].

Finally, the reactions of investment and current account are reported in the third and fifth line of panel B of Table 3. Numerical results indicate that more open countries experience larger drop in investment as the capital user cost falls less. The larger decline in investment results in a smaller current account deficit if  $\gamma = 0.8$  and yields a larger current account surplus if  $\gamma = 0$ .

---

< Please insert Table 3 about here >

---

---

< [Please insert Figures 1 about here](#) >

---

## 4 The Effects of a Temporary Terms of Trade Deterioration

Empirical evidence documented by Reinhart and Wickham [1994] indicate that permanent shocks represent almost less than 50% of the commodities price fluctuations. For certain categories of commodities, temporary shocks may account for the most important part of their price fluctuations. Importantly, Cashin, Mc Dermott et Patillo [2004] show that most African countries experience finite temporary terms of trade shocks. In addition, the persistence of relative price shifts varies widely across countries of the sample. More precisely, they find that for about half of the sample, terms of trade shocks are short-lived, i.e. half of the effect of the initial perturbation dissipates in less than four years, while for one-third of the sample, the shocks are temporary but long-lived. These empirical facts underline the need to differentiate between short-lived and long-lived shocks.

To do so, we consider that at time  $t = 0$ , the terms of trade  $p$  fall unexpectedly from  $p_0$  to  $p_1$  and remain at this level until date  $T$ . Then, they revert back to their original level at this date. we further assume that all agents perfectly understand at the outset the temporary nature of the relative price shift. Hence, at time  $T$ , there is no new information and thereby no jump in the marginal utility of wealth at this date. The higher  $T$ , the stronger is the persistence of the terms of trade shock. Because of the shift nature of the shock, it is convenient to consider the dynamics over two periods: period 1 from 0 to  $T$ , where the terms of trade are deteriorated, and period 2 from  $T$  afterwards, when the shock is removed.<sup>16</sup>

### 4.1 An Analytical Exploration

In this subsection, we explore analytically the macroeconomic effects of a temporary terms of trade deterioration.

#### Long-Term Effects

A temporary fall in  $p$  has permanent or long-run effects, because the model features the zero-root property.<sup>17</sup> Since terms of trade revert back to their initial level at time

---

<sup>16</sup>We employ the formal procedure developed by Schubert and Turnovsky [2002] to derive analytical solutions after temporary terms of trade shocks. Details of derivation can be retrieved in an Appendix on request.

<sup>17</sup>Technically, this follows from the assumption  $\beta = r^*$ , which requires the joint determination of the

$T$ , changes in the long-run, i.e. in the steady-state, are only driven by the change in the equilibrium value of the marginal utility of wealth.<sup>18</sup> Differentiating steady-state functions (30) w.r.t. the shadow value of wealth, we determine the long-term effects of an adverse temporary shift in  $p$  on consumption and foreign bonds holding:

$$\left. \frac{d\tilde{c}}{dp} \right|_{temp} = m_{\bar{\lambda}} \left. \frac{d\bar{\lambda}}{dp} \right|_{temp} > 0, \quad \left. \frac{d\tilde{b}}{dp} \right|_{temp} = v_{\bar{\lambda}} \left. \frac{d\bar{\lambda}}{dp} \right|_{temp} > 0. \quad (42)$$

According to (42), a terms of trade deterioration lowers consumption by reducing real permanent income. The long-run drop in consumption raises net exports which implies a long-run fall in the stock of foreign assets as the current account must be zero at the new steady-state. Interestingly, since the *terms of trade effect* vanishes, it can be possible for consumption to be reduced more after a temporary shock than after a permanent shock because agents do no longer benefit the drop in the consumption price index in the former case.

### Impact Effects

The initial response of consumption is given by:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dc(0)}{dp} \right|_{temp} &= \left( \frac{r^* - \mu_1}{r^* + \sigma} \right) \left( \frac{\tilde{Y} - \tilde{x}}{p_c} \right) (1 - e^{-r^*T}) \\ &\quad - \frac{\tilde{x}}{p_c} \left[ \frac{1}{\gamma + \epsilon(1 - \gamma)} \right] \frac{r^* - \mu_1}{\sigma + r^*} \left[ e^{-r^*T} - \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) e^{-\mu_2 T} \right] \geq 0, \end{aligned} \quad (43)$$

The first (positive) term on the RHS is the scaled-down version of the consumption response due to a permanent shock. As the shock is transitory, agents are induced to smooth their consumption over time. As a consequence, consumption falls less after a temporary drop in  $p$  than after a permanent decrease. The second (negative) term reflects the fact that the price change lowers the cost of living but is only of limited duration. Hence agents want to take advantage of it. Although agents wish to benefit from the lower cost in consumption good purchases while the terms of trade deteriorate, they know perfectly that the consumption price index will rise at date  $T$  and they would like to sustain their standard of living they will have during period 1. This makes consumers more reluctant to raise rapidly and sizeably their real expenditure. This effect is captured by the second term in square brackets  $\left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) e^{-\mu_2 T}$ . If the terms of trade deterioration is sufficiently short-lived and the import content of consumption  $1 - \alpha_c$  not too high, the second term more than offsets the first term so that consumption rises on impact.

---

transition and the steady-state.

<sup>18</sup>The change in the equilibrium value of the marginal utility of wealth is given by:

$$\left. \frac{d\bar{\lambda}}{dp} \right|_{temp} = (1 - e^{-r^*T}) \left. \frac{d\bar{\lambda}}{dp} \right|_{perm} - \left( \frac{r^*}{\mu_1} \right) \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma + r^*} \right) \frac{p'_c \bar{\lambda}}{p_c} (e^{-r^*T} - e^{-\mu_2 T}) < 0.$$

where  $\left. \frac{d\bar{\lambda}}{dp} \right|_{perm} = \lambda_p < 0$  represents the change of  $\bar{\lambda}$  after a permanent terms of trade shock. Though we cannot the above equation, numerical results show that the marginal utility of wealth rises after a temporary fall in the relative price of exports, irrespective of the duration of the shock.

As for consumption behavior, the transitory fall in the capital user cost driven by the relative price shift modifies the initial reaction of investment compared to that after a permanent shock:

$$\left. \frac{dI(0)}{dp} \right|_{temp} = \frac{\tilde{k}}{p\vartheta} \left[ \frac{r^*(1 - \alpha_I)}{\chi_2} (1 - e^{-\chi_2 T}) - \alpha_I e^{-\chi_2 T} \right] \geq 0. \quad (44)$$

The first (positive) term captures the negative impact of a drop in  $p$  on the marginal product of capital measured in terms of the foreign good. Since firms perfectly know that the fall in the investment price index is only temporary, they are induced to benefit the smaller capital user cost. This behavior is reflected by the second (negative) term. Since the first and the second term work in opposite direction, the initial response of investment is ambiguous. If the shock is sufficiently short-lived and the import content of investment  $1 - \alpha_I$  not too high, investment can increase in the short-run.

What happens to the net foreign asset position? The initial response of the current account is given by:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dca(0)}{dp} \right|_{temp} &= \left(1 - e^{-r^* T}\right) \left. \frac{dS(0)}{dp} \right|_{perm} + \left(\tilde{Y} - \tilde{x}\right) e^{-r^* T} \\ &\quad + \tilde{x}\eta \left(\frac{r^* - \mu_1}{\sigma + r^*}\right) \left[ e^{-r^* T} - \left(\frac{\sigma + \mu_1}{\sigma}\right) e^{-\mu_2 T} \right] - p_I \left. \frac{dI(0)}{dp} \right|_{temp} \geq 0, \end{aligned} \quad (45)$$

where  $\left. \frac{dI(0)}{dp} \right|_{temp}$  is given by (44) and  $\left. \frac{dS(0)}{dp} \right|_{perm} = \mu_1 \Upsilon^1 \left. \frac{d\tilde{s}}{dp} \right|_{perm} > 0$  represents the initial reaction of savings after a permanent shock. If the terms of trade shock deterioration is short-lived, the current account unambiguously falls as a result of the drop in saving and the rise in investment. If the shock is more persistent, the initial reaction of the current account is indeterminate as savings drop less whereas investment now declines. Yet, as after a permanent shock, as long as habit persistence is strong enough, the current account deteriorates across all scenarios, as emphasized below.

## 4.2 A Quantitative Exploration

The baseline calibration is summarized in Table 1 and identical to that described in section 3.2. As the persistence of terms of trade shocks varies widely across countries and since the responses of variables rely heavily upon the length of the shock, we consider three alternative scenarios: a short-lived, a medium-lived and a long-lived shock which last  $T_1 = 5$ ,  $T_2 = 15$ , and  $T_3 = 25$  years, respectively. Across all scenarios, we assume that the relative price of exports  $p$  falls unexpectedly and transitorily by 10%.

### Long-Term Effects

In panel A of Table 3 we report numerical results. Quantitatively the long-run effects on consumption are in principle smaller than after a permanent shock, but substantial. If the

shock is short-lived, agents cut real expenditure by 1.5% of initial GDP. Interestingly, in the baseline scenario, if the adverse relative price shift lasts 25 years, steady-state consumption drops by a larger amount (i.e. -5.8%) than that after a permanent shock (i.e. -5.4%). The reason is simple. Whereas the *wealth effect* is smaller after a temporary shock, the *terms of trade effect* which lowers the cost of living and thereby exerts a positive effect on consumption vanishes. Additionally, as for a permanent shock, consumption drops by a larger amount in more open countries. Finally, both capital stock and its shadow price remain unaffected in the long-run as their steady-state values do not depend on the *wealth effect* (see eq. (30c)).

### Dynamic Effects

We now turn to the short-run effects of a temporary terms of trade deterioration. Panel B of Table 3 reports numerical results for the baseline economy, as well as for a more open economy. The transitional paths of key variables under the baseline scenario are displayed in Figures 1.

The first line of Figures 1 displays the dynamic adjustment of consumption after a short-lived, a medium-lived and a long-lived terms of trade deterioration. The transitional path of consumption is quite distinct, depending on whether the shock is short-lived or long-lived. As shown in the first line of panel B of Table 3, consumption rises by 0.5% of initial GDP in the former case whereas  $c$  declines by -0.9% in the latter case. The reason is that in the former case, agents are willing to benefit the transitorily smaller cost of consumption goods whereas the drop in the real permanent income is moderate. As illustrated in the first line of Figures 1 for  $T = 5$ , the trajectory is hump-shaped:  $c$  jumps upward, increases over a first phase due to the fall in the rate of time preference rate below  $r^*$ , and then starts decreasing when the date  $T$  approaches.<sup>19</sup> Because the stock of habits increases over time, consumers are reluctant to raise their consumption monotonically as they perfectly know that they will be unable to sustain their standard of living once the terms of trade revert back to their original level. As a consequence, consumers start reducing consumption after 1.8 years. At this date, the rate of time preference is equalized with the world interest rate and consumption falls afterwards. Regardless of the length of the shock, consumption decreases dramatically when the terms of trade revert back to their initial level at time  $T$  since the cost of consumption goods rises abruptly. As agents care about their past consumption, they lower their consumption after  $T$  but smoothly, as consumption remains transitorily higher than its long-run level. Hence, savings fall.

The reaction of the current account is reported in the fifth line of panel B of Table 3. If

---

<sup>19</sup>Obstfeld [1983] was the first to show the possibility for consumption to rise after a temporary terms of trade deterioration. Since he considers time separable preferences, the trajectory remains flat rather than hump-shaped.



the shock lasts five years, saving falls by -4.5% of initial GDP and investment rises by 0.1% which drive the current account into a deficit by -4.7%. As the shock is more persistent, the current account always enter in deficit but its size shrinks, because investment falls rather than increasing and the decline in savings is less pronounced. Interestingly, as shown in the third line of Table 3, a more open economy would experience a rise in consumption but a drop in investment on impact even if the shock is short-lived. The reason is that in a more open economy, the capital user cost decreases much less as  $p$  falls. Additionally, while savings drop by a larger amount, the decline in investment is large enough to reduce the size of the current account deficit as trade openness increases. In line with evidence documented by Otto [2003], the current account deteriorates on impact. As documented by Freund [2005], the fall in the current account is mostly driven by the decline in savings across all scenarios.

When the terms of trade revert back to their initial level, investment drops as the capital user cost rises. Regardless the shock's persistence, capital is decumulated after  $T$ . If the shock is short-lived, i.e.  $T = 5$ , the current account enters in surplus after about nine years as the decumulation of physical capital more than offsets the decumulation of financial wealth (driven by the drop in habits).<sup>20</sup> In line with evidence reported by Freund [2005], the decline in investment drives the current account into surplus. Additionally, the current account surplus episode is associated with a decline in GDP, in line with estimates by Leonard and Stockman [2002].<sup>21</sup>

### 4.3 Trade Balance Adjustment: The J-Curve

So far, we have analyzed current account dynamics. However, empirical studies usually approximate the current account with the balance of trade. In our framework, net exports denoted by  $nx$ , are equal to GDP less consumption and investment expenditure:  $nx(t) = pF(k, 1) - p_c c - p_I \kappa \left(\frac{q}{p_I}\right) k \left[1 + \frac{\psi}{2} \kappa \left(\frac{q}{p_I}\right)\right]$ . By substituting the home good market clearing condition, i.e.  $Exp = Y - x - J_x$ , into the above equality, the balance of trade can be rewritten as exports less imports of consumption and capital goods:

$$nx(t) = pExp(t) - z - J_z. \quad (46)$$

The third line of Figures 1 displays the dynamic adjustment of net exports, expressed in percent of initial steady-state output, for alternative lengths of the shock. The terms of trade deterioration drives down exports as both the unit price  $p$  and the volume of exports  $Exp$  decline. In the same time, imports increase or decrease depending on whether the

<sup>20</sup>If the shock is medium-lived (long-lived), a surplus arises only after thirty (fifty-five) years.

<sup>21</sup>It is worthwhile to notice that the current account is counter-cyclical, which accommodate the evidence established by Backus, Kehoe et Kydland [1994] and Mendoza [1995].

shock is short-lived or long-lived. As shown in the third line of Figures 1, regardless of the shock's duration, net exports fall on impact and decrease further as time passes. The reason is that exports decrease across all scenarios. The trade balance enters in a larger deficit if the shock is short-lived, i.e. for  $T = 5$ , as imports increase. At time  $T$ , both households and firms lower consumption and investment expenditure which raise exports and lower imports. The consecutive increase in net exports is large enough to drive the balance of trade into surplus. The rise in net exports along the transitional path once the shock ends originates from the fall in imports.

In the long-run, the current account must be zero. Hence, a decrease in the stock of foreign bonds must be offset by an improvement in the balance of trade. The third line of Figures 1 show that the transitional adjustment of net exports displays a J-curve pattern: the trade balance deficit over a first phase originates from the drop in exports whereas the decline in imports causes a trade balance surplus over a second phase.

## 5 Welfare Analysis

We now investigate the effects of a terms of trade deterioration on welfare. The two last lines of panel A of Table 3 summarize the effects of an adverse relative price shift on steady-state instantaneous utility  $\phi$  and overall welfare  $U$ , respectively. The last measure represents the change in intertemporal welfare  $U$

$$U = \int_0^{\infty} \phi(t) \exp(-\delta t) dt. \quad (47)$$

where  $\phi$  is given by (5). The measure of overall welfare allows for evaluating the felicity flows over the agent's infinite planning horizon, say both in the long-run and over the transitional path. The effects on welfare reported are equivalent variation measures, calculated as the percentage change in the permanent flow of consumption necessary to equate the initial level of welfare to what it would be after the terms of trade shock. In addition, we report in the last line of panel B of Table 3 the effects on welfare at time  $t = 0$ , i.e. at the time the open economy experiences a terms of trade worsening.

We start first with the effects following a permanent shock. If agents have time separable preferences, consumption adjusts immediately to its new lower long-run level. Since transitional dynamics degenerate in this case, both instantaneous welfare and overall welfare fall by 5.8%. If agents care about past consumption, instantaneous welfare of the representative agent falls now by 10.1 percent, meaning that the agent is indifferent between the shock and a 10.1 percent reduction in his instantaneous consumption level. As shown in the fourth line of Figures 1, instantaneous welfare  $\phi$  remains below than its steady-state so that agents experience welfare losses over the transition. As a consequence, overall welfare

falls more than  $\phi$ ; more precisely,  $U$  decreases by 11.3%.

The analysis of the welfare effects of a temporary terms of trade deterioration leads to a surprising and perhaps counter-intuitive result: an adverse shift in the relative price of exports can produce overall welfare gains, as long as agents have consumption habits and the shock is short-lived. As stressed previously, if the shock is weakly persistent, i.e. lasts  $T = 5$  years, agents raise their real expenditure. As shown in the fourth line of Figures 1, instantaneous welfare rises immediately by 4.1%. Whereas agents experience a drop in utility in the long-run (by -2.9%), utility gains over the transitional path are large enough to raise  $U$ . By contrast, if the shock is more persistent, i.e. lasts  $T = 15$  or  $T = 25$  years,  $U$  falls by -3.2% or -6.3%. Finally, we find numerically that following a short-lived shock, overall welfare remains unchanged rather than increasing in a more open economy. The reason is that in this case, the initial response of consumption is moderated, i.e.  $c$  increases by 0.3% rather than 0.5% of initial GDP.

## 6 Conclusion

In this paper, we have shown that the introduction of a habit index into the utility function helps improving the predictive power of the small open economy model of neoclassical type. In particular, a robust observation emerging from empirical studies is that following a terms of trade worsening, the current account tends to deteriorate first for a while as a result of the drop in savings while the current account tends to improve after some lags as a result of the decline in investment. Additionally, the current account surplus episode is associated with a reduction of GDP. Allowing for both habit formation and capital adjustment costs enable the model to account for these findings. More precisely, it is found that habit persistence must be strong enough to produce an initial current account deficit while the stock of habits must adjust faster than physical capital to produce the non monotonic adjustment of the net foreign asset position found in the data.

A novel finding due to the introduction of consumption habits, is that the dynamic path for consumption is quite distinct depending on whether the terms of trade deterioration is permanent or temporary. After a permanent shock, consumption falls monotonically. If the adverse relative price shift is weakly persistent, the trajectory of consumption becomes hump-shaped: households find optimal to first raise their real expenditure while the cost of consumptions goods is low but to lower consumption afterwards as the consecutive accumulation of habits lowers welfare. In this case, we find numerically that agents experience overall welfare gains as utility flows when the shock is in effect more than offsets the utility losses when the shock ends. Yet, the sensitivity analysis reveals that raising trade openness plays a pivotal role in determining welfare effects. Even if the shock is short-lived, overall

welfare remains unchanged as the incentive to raise consumption is smaller.

## References

- Alvarez-Cuadrado, Francisco, Goncarlo Monteiro, and Stephen J. Turnovsky (2004) Habit Formation, Catching up with the Joneses, and Economic Growth. *Journal of Economic Growth* 9(1), 47-80.
- Backus, David K., Patrick J. Kehoe, and Finn E. Kydland (1994) Dynamics of the Trade Balance and the Terms of Trade: The J-Curve?. *American Economic Review* 84(1), 84-103.
- Carroll, Christopher D., Jody Overland, and David N. Weil (2000) Saving and Growth with Habit Formation. *American Economic Review* 90(3), 341-355.
- Cashin, Paul, and C. John Mc Dermott (2002) Terms of Trade Shocks and the Current Account: Evidence from Five Industrial Countries?. *Open Economies Review* 13, 219-235.
- Cashin, Paul and John C. McDermott (2003) Intertemporal Substitution and Terms-of-Trade Shocks. *Review of International Economics*, 11 (4), 604-618.
- Cashin, Paul, John Mc Dermott, Catherine Patillo (2004) Terms of Trade Shocks in Africa: Are they Short-Lived or Long-Lived?. *Journal of Development Economics* 73, 727-744.
- Corsetti, Giancarlo, and Gernot Müller (2006) Twin Deficits: Squaring Theory, Evidence and Common Sense. *Economic Policy* 48, 597-638.
- Easterly, William, Michael Kremer, Lant Pritchett and Lawrence Summers (1993) Good Policy or Good Luck? *Journal of Monetary Economics* 32, 459-483.
- Epstein, Larry G. (1987) A Simple Dynamic General Equilibrium Model. *Journal of Economic theory* 41, 68-95.
- Freund, Caroline. (2005) Current Account Adjustment in Industrial Countries *Journal of International Money and Finance* 24, 1278-1298.
- Gavin, Michael (1992) Monetary policy, exchange rates, and investment in a Keynesian economy. *Journal of International Money and Finance* 11, 145-161.
- Gruber, Joseph W. (2002) Productivity Shocks, Habits, and the Current Account. *International Finance Discussion Papers n<sup>o</sup> 733*, Board of Governors of the Federal System.
- Krugman, Paul (1989) The J-Curve, the Fire Sale, and the Hard Landing. *American Economic Review*, Papers and Proceedings of the Hundred and First Annual Meeting of the American Economic Association 79(2), 31-35.
- Leonard, Greg and Alan C. Stockman (2002) Current Accounts and Exchange Rates: A New Look at the Evidence. *Review of International Economics* 10(3), 483-496.
- Mansoorian, Arman (1993) Habit persistence and the Harberger-Laursen-Metzler Effect. *Journal of International Economics* 34, 153-166.
- Mansoorian, Arman (1998) Habits and Durability in Consumption, and the Dynamics of the Current Account. *Journal of International Economics* 44, 69-82.
- Mendoza, Enrique (1995) The Terms of Trade, the Real Exchange Rate, and Economic Fluctuations. *International Economic Review* 36(1), 101-137.
- Obstfeld, Maurice (1982) Aggregate Spending and the Terms of Trade: Is There a Laursen-Metzler Effect?. *The Quarterly Journal of Economics* 97, 251-270.
- Obstfeld, Maurice (1983) Intertemporal Price Speculation and the Optimal Current-Account Deficit. *Journal of International Money and Finance* 2, 135-145.
- Ostry, Jonathan D. (1988) The Balance of Trade, Terms of Trade, and Real Exchange Rate: An Intertemporal Optimizing Framework. *IMF Staff Papers* 35, 541-573.
- Otto, Glenn (2003) Terms of Trade Shocks and the Balance of Trade: There is a Harberger-Laursen-Mezler Effect. *Journal of International Money and Finance* 22, 155-184.
- Pakko, Michael R. (2003) Substitution Elasticities and Investment Dynamics in Two-Country Business Cycle Models. *Topics in Macroeconomics* 3(1), article 14.
- Reinhart, Carmen M. and Peter Wickham (1994) Commodity Prices: Cyclical Weakness or Secular Decline. *IMF Staff Papers* 41(2), 175-213.

- Schubert, Stefan F., and Stephen J. Turnovsky (2002) The Dynamics of Temporary Policies in a Small Open Economy. *Review of International Economics* 10(4), 604-622.
- Sen, Partha and Stephen J. Turnovsky (1989) Deterioration of the Terms of Trade and Capital Accumulation: A Re-Examination of the Laursen-Metzler Effect. *Journal of International Economics* 26, 227-250.
- Servèn, Luis (1999) Terms of Trade Shocks and Optimal Investment: Another Look at the Laursen-Metzler Effect. *Journal of International Money and Finance* 18, 337-365.
- Sommer, Martin (2007) Habit Formation and Aggregate Consumption Dynamics. *The B.E. Journal of Macroeconomics*, 7(1) (Advances), Article 21.

Table 1: Steady-State Effects of a Terms of Trade Deterioration

Variables	Permanent Shock			Temporary Shock		
	Wealth	Terms of Trade	Overall	Wealth	Terms of Trade	Overall
Consumption, $c$	-	+	-	-	0	-
Market price of capital, $q$	0	-	-	0	0	0
Capital, $k$	0	-	-	0	0	0
Foreign assets, $b$	-	+	-	-	0	-
Financial wealth, $a$	-	+	-	-	0	-

Table 2: Baseline Parametrization

Parameters	Definition	Value
$\gamma$	Weight of habits in utility	0.8
$\epsilon$	Relative risk aversion	2.5
$\sigma$	Speed of adjustment of habits	0.6
$\varphi_c$	Weight of consumption goods imports $z$	0.2
$\phi_c$	Intra-temporal elasticity of substitution between $x$ and $z$	1.5
$\varphi_I$	Weight of capital goods imports $J_z$	0.4
$\phi_I$	Intra-temporal elasticity of substitution between $J_x$ and $J_z$	1.5
$\alpha_K$	Capital income share in output	1/3
$\delta_K$	Rate of depreciation of $k$	0.05
$\vartheta$	Marginal capital installation costs	5
$r^*$	World interest rate ( $= \delta$ )	0.05

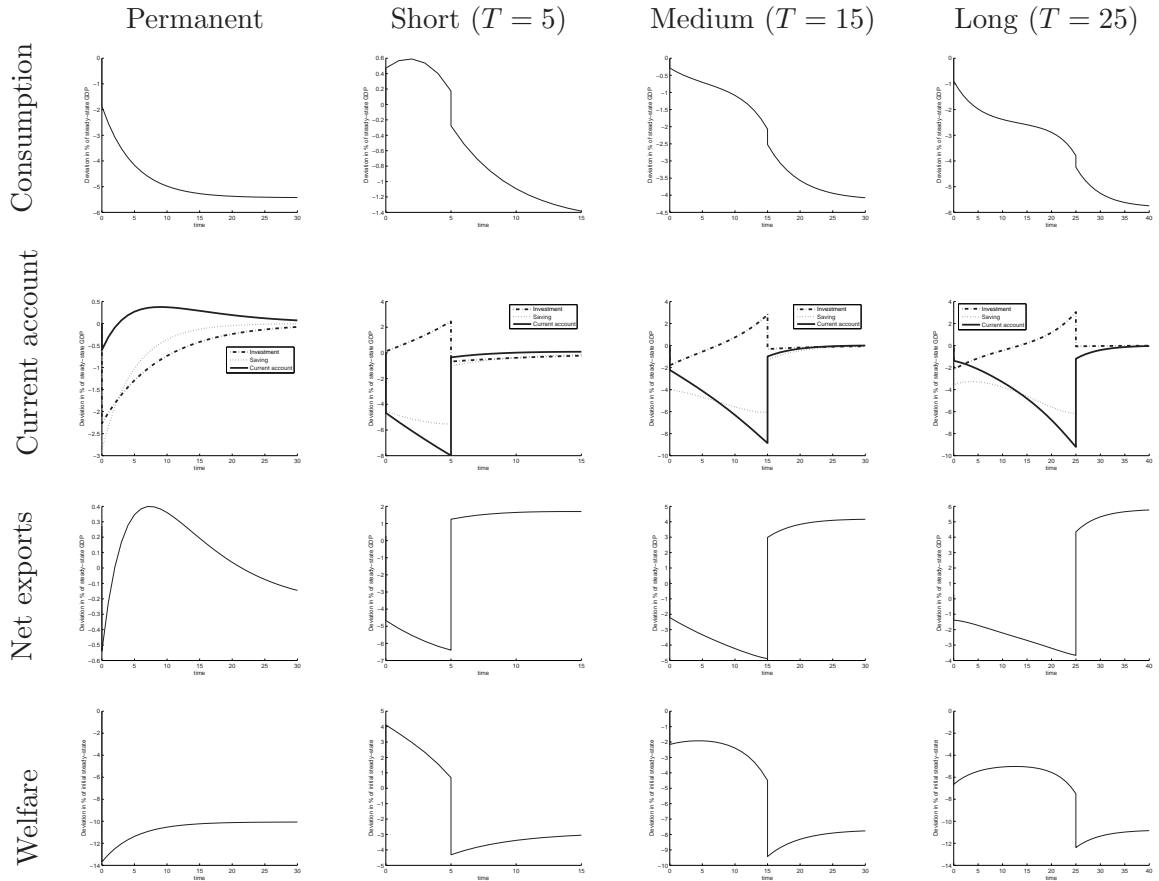


Figure 1: Effects of a Terms of Trade Deterioration. Notes: Variables are measured in percentage points of output. Effects on welfare are equivalent variation measures, calculated as the percentage change in consumption necessary to equate the initial level of welfare to what it would be following the shock.

Table 3: Quantitative Effects of a Terms of Trade Deterioration (in %)

Variables	Permanent				Temporary					
	Baseline		Open		Baseline			Open		
	$(\gamma = 0.8)$	$(\gamma = 0)$	$(\gamma = 0.8)$	$(\gamma = 0)$	Short ( $T = 5$ )	Medium ( $T = 15$ )	Long ( $T = 25$ )	Short ( $T = 5$ )	Medium ( $T = 15$ )	Long ( $T = 25$ )
<b>A. Long-Term</b>										
Marginal utility of wealth, $\bar{\lambda}$	24.9	26.3	26.7	31.9	3.8	11.0	16.0	4.2	11.8	17.2
Consumption, $\tilde{c}$	-5.4	-3.7	-6.3	-5.3	-1.5	-4.1	-5.8	-1.7	-4.4	-6.2
Market price of capital, $\tilde{q}$	-6.2	-6.2	-4.2	-4.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Investment, $\tilde{I}$	-1.1	-1.1	-1.7	-1.7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Financial wealth, $\tilde{a}$	-13.9	0.0	-16.2	0.0	-3.9	-10.6	-14.9	-4.3	-11.4	-15.8
Net exports, $n\tilde{x}$	-0.2	-0.9	-0.6	-1.4	1.5	4.1	5.8	1.7	4.4	6.2
Instantaneous welfare, $\tilde{\phi}$	-10.1	-5.8	-11.7	-8.2	-2.9	-7.7	-10.8	-3.1	-8.2	-11.5
Overall welfare, $U$	-11.3	-5.8	-13.1	-8.2	0.6	-3.2	-6.3	-0.0	-4.6	-7.9
<b>B. Impact</b>										
Consumption, $c(0)$	-1.9	-3.7	-2.2	-5.3	0.5	-0.3	-0.9	0.3	-0.5	-1.2
Market price of capital, $q(0)$	-8.1	-8.1	-7.0	-7.0	-4.5	-7.4	-7.9	-3.9	-6.4	-6.9
Investment, $I(0)$	-2.3	-2.3	-3.4	-3.4	0.1	-1.8	-2.2	-1.3	-3.0	-3.3
Savings, $S(0)$	-2.9	0.0	-3.3	0.0	-4.5	-4.0	-3.6	-5.2	-4.6	-4.1
Current account, $ca(0)$	-0.6	2.3	0.0	3.4	-4.7	-2.2	-1.4	-3.9	-1.6	-0.8
Instantaneous welfare, $\phi(0)$	-13.7	-5.8	-15.9	-8.2	4.1	-2.2	-6.6	2.7	-4.1	-8.7

Notes: We consider a fall in the relative price of exports by 10%. Impact and steady-state deviations are scaled by initial GDP, exception with the market price of installed capital scaled by its initial steady-state value. Investment expenditure include capital installation costs. Welfare effects are equivalent variation measures. For the baseline economy, import content of consumption and investment are 20% and 40% respectively, while for the open economy, import content are 30% and 60% respectively. A short-lived, medium-lived and long-lived shock lasts 5, 15, 25 years respectively.



# Chocs des termes de l'échange et ajustement non monotone du solde courant

*Appendice technique*

Janvier 2011

OLIVIER CARDI

# A Equilibre macroéconomique et l'étude au voisinage de l'état-stationnaire

## A.1 Propriétés de la fonction d'utilité avec habitudes de consommation

On suppose que la fonction d'utilité prend la forme du fonction à aversion relative vis-à-vis du risque constante :

$$u(c, s) = \frac{1}{1-\epsilon} \left[ \frac{c}{s^\gamma} \right]^{1-\epsilon}. \quad (48)$$

Les dérivées partielles premières et secondes de la fonction d'utilité s'écrivent sous la forme suivante :

$$u_c = c^{-\epsilon} s^{-\gamma(1-\epsilon)} > 0, \quad (49a)$$

$$u_s = -\gamma c^{1-\epsilon} s^{-[\gamma(1-\epsilon)+1]} < 0, \quad (49b)$$

$$u_{cc} = -\epsilon c^{-(1+\epsilon)} s^{-\gamma(1-\epsilon)} < 0, \quad (49c)$$

$$u_{ss} = \gamma [\gamma(1-\epsilon) + 1] c^{1-\epsilon} s^{-[\gamma(1-\epsilon)+2]} < 0 \quad \text{s. s. i} \quad \epsilon > \frac{1+\gamma}{\gamma}, \quad (49d)$$

$$u_{cs} = -\gamma(1-\epsilon) c^{-\epsilon} s^{-[\gamma(1-\epsilon)+1]} > 0 \quad \text{s. s. i} \quad \epsilon > 1. \quad (49e)$$

Nous donnons des expressions qui s'avèreront utiles pour l'analyse :

$$\tilde{u}_c + \frac{\sigma}{\delta + \sigma} \tilde{u}_s = \tilde{c}^{-[\epsilon + \gamma(1-\epsilon)]} \frac{\delta + \sigma(1-\gamma)}{\delta + \sigma} > 0, \quad (50a)$$

$$\frac{\sigma(\delta + \sigma)}{\tilde{u}_{cc}} \left[ \tilde{u}_{cc} + \frac{\delta + 2\sigma}{\delta + \sigma} \tilde{\Gamma} \right] = \frac{\sigma}{\epsilon} [\gamma + \epsilon(1-\gamma)] [\delta + \sigma(1-\gamma)] > 0, \quad (50b)$$

$$-\frac{\left[ \tilde{u}_c + \frac{\sigma}{\delta + \sigma} \tilde{u}_s \right]}{\left[ \tilde{u}_{cc} + \frac{\delta + 2\sigma}{\delta + \sigma} \tilde{\Gamma} \right] \tilde{c}} = 1 / [\gamma + \epsilon(1-\gamma)], \quad (50c)$$

$$-\frac{p_c \bar{\lambda}}{\tilde{p} \tilde{u}_{cc} \tilde{c}} = -\frac{\tilde{u}_c + \frac{\sigma}{\delta + \sigma} \tilde{u}_s}{\tilde{u}_{cc} \tilde{c}} = \frac{[\delta + \sigma(1-\gamma)]}{\epsilon(\delta + \sigma)} > 0, \quad (50d)$$

$$-\frac{\sigma(\delta + 2\sigma)}{\tilde{u}_{cc}} \tilde{\Gamma} = \frac{\sigma\gamma}{\epsilon} \{ \sigma\epsilon - (1-\epsilon) [\delta + \sigma(1-\gamma)] \} > 0, \quad (50e)$$

$$\left[ \tilde{u}_{cc} + \frac{\delta + 2\sigma}{\delta + \sigma} \tilde{\Gamma} \right] = -p_c \bar{\lambda} [\gamma + \epsilon(1-\gamma)] \tilde{c}^{-1} < 0. \quad (50f)$$

## A.2 Conditions du premier ordre

Les conditions du premier ordre s'écrivent sous la forme suivante :

$$c^{-\epsilon} s^{-\gamma(1-\epsilon)} + \sigma\xi = p_c(p) \lambda, \quad (51a)$$

$$q = p_I(p) \left[ 1 + \psi \frac{I}{k} \right], \quad (51b)$$

$$\dot{\lambda} = 0, \quad \text{c. a. d.} \quad \lambda = \bar{\lambda}, \quad (51c)$$

$$\dot{\xi} = (\delta + \sigma) \xi + \gamma c^{1-\epsilon} s^{-[\gamma(1-\epsilon)+1]}, \quad (51d)$$

$$\dot{q} = (r^* + \delta_K) q - \left[ pF_k(k, 1) + p_I(p) \frac{\psi}{2} \left( \frac{I}{k} \right)^2 \right], \quad (51e)$$

$$\dot{b} = r^* b + pF(k, 1) - p_c(p) c - p_I(p) \left[ I + \frac{\psi I^2}{2k} \right], \quad (51f)$$

avec les équations dynamiques (4) et (10). L'équation d'accumulation du stock d'actifs étrangers est déterminée dans la section A.5.

De la relation (51b) découle la règle d'investissement optimal :

$$I = \kappa (q/p_I) k, \quad \kappa'(\cdot) > 0, \quad \kappa(1) = 0. \quad (52)$$

où  $q/p_I(p)$  correspond au  $q$  de Tobin.

### A.3 Détermination de l'équation dynamique de la consommation

En différenciant l'équation (51a) par rapport au temps, en substituant (4) et (51d), et en utilisant (99a) pour éliminer  $\xi$ , on est en mesure de déterminer l'équation dynamique de la consommation réelle :

$$\dot{c} = \frac{1}{u_{cc}} [(\delta + \sigma) (u_c - p_c(p) \bar{\lambda}) + \sigma u_s - u_{cs} \sigma (c - s)]. \quad (53)$$

En utilisant la forme fonctionnelle (48) de la fonction d'utilité, on peut réécrire l'équation dynamique (53) de la façon suivante :

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\epsilon} \left\{ \sigma \gamma \epsilon \left( \frac{c}{s} \right) + \sigma \gamma (1 - \epsilon) + (\delta + \sigma) \left[ p_c \bar{\lambda} c^\epsilon s^{\gamma(1-\epsilon)} - 1 \right] \right\}. \quad (54)$$

On définit le taux de préférence pour l,  $\rho$ , comme l'opposé de la dérivée logarithmique de la valeur de l'utilité marginale de la dépense réelle le long d'un sentier de consommation constant (voir Epstein [1987]):

$$\rho \equiv - \left. \frac{d \ln \{ [u_c(c, s) + \sigma \xi] \exp(-\delta t) \}}{dt} \right|_{\dot{c}(t)=0}. \quad (55)$$

En substituant les équations dynamiques du stock d'habitudes (4) et de son prix implicite (51d), et en éliminant  $\xi$  en utilisant (51a), l'expression du taux de préférence pour le présent est donnée par :

$$\rho(t) = \delta + \frac{1}{p_c \lambda} [\sigma u_s - u_{cs} \sigma (c - s) + (\delta + \sigma) (u_c - p_c \lambda)]. \quad (56)$$

En utilisant l'expression du taux de préférence pour le présent donnée par (56), nous pouvons réécrire l'équation dynamique de la consommation réelle le long d'un sentier optimal sous une forme plus familière :

$$\dot{c} = - \frac{p_c \lambda}{u_{cc}} (r^* - \rho(t)), \quad (57)$$

où le sentier temporel des TDE est supposé constant.

### A.4 Linéarisation au voisinage de l'équilibre de long terme

En substituant au préalable la solution statique de court terme de l'investissement (14) dans l'équation d'accumulation du capital physique (10), puis en linéarisant au voisinage de l'état stationnaire l'équation dynamique de la consommation réelle,  $c$ , donnée par (54), l'équation

d'accumulation du stock d'habitudes,  $s$ , donnée par (6), l'équation d'accumulation en biens d'équipement, et l'équation dynamique du prix implicite du capital (51e), on obtient sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{c} \\ \dot{k} \\ \dot{q} \end{pmatrix}^T = J \begin{pmatrix} s(t) - \tilde{s} \\ c(t) - \tilde{c} \\ k(t) - \tilde{k} \\ q(t) - \tilde{q} \end{pmatrix}^T, \quad (58)$$

avec la matrice des coefficients  $J$

$$J \equiv \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 & 0 \\ a_{21} & \delta + \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_K & \kappa'(1) \frac{\tilde{k}}{pI(\tilde{p})} \\ 0 & 0 & -\tilde{p}F_{kk} & (r^* + \delta_K) \end{pmatrix}, \quad (59)$$

où les variables évaluées à l'état-stationnaire sont notées avec un tilde et l'expression de  $a_{21}$  est donnée par

$$a_{21} = \frac{\gamma}{\epsilon} \{ \sigma(1 - \epsilon) + [(\delta + \sigma)(1 - \epsilon) - \sigma[1 + \gamma(1 - \epsilon)]] \}. \quad (60)$$

La matrice des coefficients est constituée de deux sous blocs matriciels indépendants en raison de l'absence de lien entre les décisions de consommation et les choix d'investissement (Théorème de séparation de Fisher), facilitant ainsi l'étude de la stabilité. Les (sous-) systèmes linéarisés au voisinage des l'états-stationnaires  $(\tilde{s}, \tilde{c})$  et  $(\tilde{k}, \tilde{q})$  sont caractérisés par un équilibre de type point-selle dont les sentiers stables de convergence s'écrivent respectivement de la manière suivante.

La matrice des coefficients  $J$  du système linéarisé au voisinage de l'état-stationnaire est composée de deux sous blocs matriciels indépendants que nous notons  $J_1$  et  $J_2$ .

### Le bloc de consommation

Le système dynamique linéarisé noté  $J_1$  s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{s}(t) \\ \dot{c}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ \frac{\gamma}{\epsilon} \{ (1 - \epsilon) [\delta + \sigma(1 - \gamma)] - \sigma \epsilon \} & \delta + \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s(t) - \tilde{s} \\ c(t) - \tilde{c} \end{pmatrix}. \quad (61)$$

On note  $J_1$  le sous-bloc matriciel composé des deux premières lignes et des deux premières colonnes de  $J$  décrite par (59). La trace et le déterminant de  $J_1$  sont donnés par :

$$\text{tr}(J_1) = \delta = r^* > 0, \quad \text{Det}(J_1) = -\frac{\sigma}{\epsilon} [\gamma + \epsilon(1 - \gamma)] [\delta + \sigma(1 - \gamma)] < 0. \quad (62)$$

Les valeurs propres associées à  $J_1$  s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mu_i &\equiv \frac{1}{2} \left\{ \delta \pm \sqrt{\delta^2 + \frac{4\sigma}{\epsilon} [\gamma + \epsilon(1 - \gamma)] [\delta + \sigma(1 - \gamma)]} \right\} \leq 0, \quad i = 1, 2, \\ &\equiv \frac{1}{2} \left\{ \delta \pm \sqrt{(\delta + 2\sigma)^2 - \frac{4\sigma\gamma}{\epsilon} [\sigma\epsilon - [\delta + \sigma(1 - \gamma)](1 - \epsilon)]} \right\} \leq 0, \quad i = 1, 2, \\ &\equiv \frac{1}{2} \left\{ \delta \pm \sqrt{[\delta + 2\sigma(1 - \gamma)]^2 + \frac{4\sigma\gamma}{\epsilon} [\delta + \sigma(1 - \gamma)]} \right\} \leq 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (63)$$

où  $[\gamma + \epsilon(1 - \gamma)][\delta + \sigma(1 - \gamma)] > 0$  puisque  $0 \leq \gamma < 1$ . D'après la seconde expression de  $\mu_i$ , il est aisé de montrer que  $(\sigma + \mu_1) > 0$  puisque le terme sous la racine est inférieur à  $(\delta + 2\sigma)$ .

L'équation caractéristique possède une valeur propre négative notée  $\mu_1 < 0$  et une valeur propre positive notée  $\mu_2 > 0$  qui satisfont l'inégalité suivante :

$$\mu_1 < 0 < r^* < \mu_2, \quad (64)$$

ce qui implique l'existence d'un équilibre de long terme de type point-selle dans l'espace  $(s, c)$ .

Etant une valeur propre de la matrice linéarisée (59),  $\mu_i$  est une solution de l'équation quadratique suivante :

$$\left(\frac{\sigma + \mu_i}{\sigma}\right) = \frac{\gamma[\sigma\epsilon - (1 - \epsilon)[\delta + \sigma(1 - \gamma)]]}{\epsilon(\delta + \sigma - \mu_i)} > 0. \quad (65)$$

La solution générale du sous-système linéarisé  $J_1$  est donnée par :

$$s(t) = \tilde{s} + A_1 e^{\mu_1 t} + A_2 e^{\mu_2 t}, \quad (66a)$$

$$c(t) = \tilde{c} + \omega_2^1 A_1 e^{\mu_1 t} + \omega_2^2 A_2 e^{\mu_2 t}, \quad (66b)$$

où nous avons normalisé à l'unité le vecteur propre  $\omega_2^i$  et  $A_1$  and  $A_2$  sont des constantes devant être déterminées. Les vecteurs propres  $\omega_2^i$  associés aux valeurs propres  $\mu_i$  sont donnés par :

$$\omega_2^1 = \left(\frac{\sigma + \mu_1}{\sigma}\right) > 0 \quad \omega_2^2 = \left(\frac{\sigma + \mu_2}{\sigma}\right) > 0. \quad (67)$$

En utilisant (63), il est aisé de montrer que  $\omega_2^1$  est positif :

$$\sigma + \mu_1 = \frac{1}{2} \left\{ (\delta + 2\sigma) - \sqrt{(\delta + 2\sigma)^2 - \frac{4\sigma\gamma}{\epsilon} [\sigma\epsilon - [\delta + \sigma(1 - \gamma)](1 - \epsilon)]} \right\}. \quad (68)$$

### **Le bloc de production**

Le système dynamique linéarisé noté  $J_2$  s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{k}(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta_K & \kappa'(1) \frac{\tilde{k}}{p_I} \\ -pF_{kk} & r^* + \delta_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k(t) - \tilde{k} \\ q(t) - \tilde{q} \end{pmatrix}. \quad (69)$$

On note  $J_2$  le déterminant du sous bloc matriciel composé des deux dernières lignes et des deux dernières colonnes de  $J$ . La trace et le déterminant de  $J_2$  sont donnés par :

$$\text{tr}(J_2) = r^* > 0, \quad \text{Det}(J_2) = -\delta_K (r^* + \delta_K) + \frac{\kappa'(1) \tilde{k} p F_{kk}}{p_I} < 0. \quad (70)$$

Les valeurs propres associées à  $J_2$  s'écrivent sous la forme suivante :

$$\chi_i \equiv \frac{1}{2} \left\{ r^* \pm \sqrt{(r^* + 2\delta_K)^2 - 4 \frac{\kappa'(1) \tilde{k} p F_{kk}}{p_I (\tilde{p})}} \right\} \leq 0, \quad i = 1, 2, \quad (71)$$

L'équation caractéristique possède une valeur propre négative notée  $\chi_1 < 0$  et une valeur propre positive notée  $\chi_2 > 0$  qui satisfont l'inégalité suivante :

$$\chi_1 < 0 < r^* < \chi_2, \quad (72)$$

ce qui implique l'existence d'un équilibre de long terme de type point-selle dans l'espace  $(k, q)$ .

La solution générale du sous-système linéarisé  $J_2$  est donnée par :

$$k(t) = \tilde{s} + B_1 e^{\chi_1 t} + B_2 e^{\chi_2 t}, \quad (73a)$$

$$q(t) = \tilde{q} + \varpi_2^1 B_1 e^{\chi_1 t} + \varpi_2^2 B_2 e^{\chi_2 t}, \quad (73b)$$

où nous avons normalisé à l'unité le vecteur propre  $\varpi_1^i$  et  $B_1$  and  $B_2$  sont des constantes devant être déterminées. Le vecteurs propre  $\varpi_2^i$  associé à la valeur propre  $\chi_i$  s'écrit de la façon suivante :

$$\varpi_2^i = \frac{p_I (\delta_K + \chi_i)}{\kappa' (1) \tilde{k}} = \frac{p F_{kk}}{(r^* - \chi_i) + \delta_K} \quad (74)$$

Les vecteurs propres  $\varpi_2^1$  et  $\varpi_2^2$  associés aux valeurs propres stable  $\chi_1$  et instable  $\chi_2$  sont donnés par :

$$\varpi_2^1 = \frac{p_I (\chi_1 + \delta_K)}{\kappa' (1) \tilde{k}} = \frac{p F_{kk}}{\delta_K + (r^* - \chi_1)} < 0, \quad \varpi_2^2 = \frac{p_I (\chi_2 + \delta_K)}{\kappa' (1) \tilde{k}} = \frac{p F_{kk}}{\delta_K + (r^* - \chi_2)} > 0. \quad (75)$$

## A.5 La solution formelle du stock d'actifs étrangers

### Détermination de l'équation dynamique du stock d'actifs étrangers

En différentiant l'expression de la richesse financière,  $a = b + qk$ , par rapport au temps et en substituant les équations d'accumulation de la richesse financière et du capital physique données respectivement par (6) et (10), et l'équation dynamique du prix implicite du capital donnée par (51e), on obtient l'équation d'accumulation des actifs étrangers :

$$\dot{b} = r^* b + p F(k, 1) - p_c(p) c - p_I(p) I \left[ 1 + \psi \left( \frac{I}{k} \right) \right], \quad (76)$$

où nous avons utilisé la propriété de rendements d'échelle constants de la fonction de production qui implique  $pY = pF_k k + pF_l$  (avec  $pF_l = w$  et  $l = \bar{l} = 1$ ) et nous avons substitué l'expression du prix implicite du capital  $q$  donnée par (51b).

En substituant au préalable la solution statique de l'investissement donnée par (15) et en linéarisant (76) au voisinage de l'équilibre de long terme, on obtient :

$$\dot{b}(t) = r^* (b(t) - \tilde{b}) + p_I (r^* + \delta_K) (k(t) - \tilde{k}) - p_c (c(t) - \tilde{c}) - \tilde{k} \kappa' (1) (q(t) - \tilde{q}). \quad (77)$$

En substituant les solutions générales de  $q(t)$  et  $s(t)$ , puis en résolvant, on obtient la solution générale du stock d'actifs étrangers :

$$b(t) = \tilde{b} + \left[ (b_0 - \tilde{b}) + p_I B_1 + p_I B_2 + \Upsilon_s^1 A_1 + \Upsilon_s^2 A_2 \right] e^{r^* t} - p_I B_1 e^{\chi_1 t} - p_I B_2 e^{\chi_2 t} - \Upsilon_s^1 A_1 e^{\mu_1 t} - \Upsilon_s^2 A_2 e^{\mu_2 t}, \quad (78)$$

où on pose

$$\Upsilon_s^i = \frac{p_c(\sigma + \mu_i)}{\sigma(\mu_i - r^*)}, \quad i = 1, 2. \quad (79)$$

En invoquant la condition de transversalité (12), on obtient la solution stable du stock d'actifs étrangers :

$$b(t) = \tilde{b} - p_I B_1 e^{\chi_1 t} - \Upsilon_s^1 A_1 e^{\mu_1 t}, \quad (80)$$

compatible avec la contrainte de budget nationale intertemporelle s'écrivant sous la forme suivante :

$$b_0 - \tilde{b} = -p_I (k_0 - \tilde{k}) - \Upsilon_s^1 (s_0 - \tilde{s}). \quad (81)$$

L'évolution du solde de la balance courante, noté  $ca$ , le long de la dynamique transitoire est obtenu en différentiant la solution stable du stock d'actifs étrangers (80) par rapport au temps  $t$  :

$$ca(t) = \dot{b}(t) = -\mu_1 \Upsilon_s^1 A_1 e^{\mu_1 t} - \chi_1 p_I B_1 e^{\chi_1 t} = S(t) - p_I \dot{k}(t). \quad (82)$$

où  $S(t) = \dot{a}(t)$  (voir éq. (73a)).

Le stock d'actifs étrangers s'ajuste de manière non monotone et par suite le solde courant change de signe lors de l'ajustement vers l'équilibre à la date  $t = \check{t}$  telle que  $ca(\check{t}) = \dot{b}(\check{t}) = 0$  s'écrivant sous la forme suivante :

$$\check{t} = \frac{1}{\mu_1 - \chi_1} \ln \left[ -\frac{\chi_1 p_I B_1}{\mu_1 \Upsilon_s^1 A_1} \right]. \quad (83)$$

Il existe une telle date  $\check{t}$  si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. la valeur propre stable associée au bloc de consommation doit être inférieure à la valeur propre stable associée au bloc de production, c. a. d.  $\mu_1 < \chi_1 < 0$ ;
2. le terme entre crochets de l'expression (83) de  $\check{t}$  doit être inférieur à l'unité ce qui de manière équivalent exige un solde courant négatif à court terme

$$\left. \frac{dca(0)}{dp} \right|_{perm} = \left. \frac{dS(0)}{dp} \right|_{perm} - p_I \left. \frac{dI(0)}{dp} \right|_{perm} = \mu_1 \Upsilon_s^1 \left. \frac{d\tilde{s}}{dp} \right|_{perm} + \chi_1 p_I \left. \frac{d\tilde{k}}{dp} \right|_{perm}.$$

où nous avons utilisé le fait que  $\dot{k}(0) = I(0) - \delta_K k_0$  avec  $k_0$  prédéterminé initialement (et donc ne se modifie pas à l'impact du choc).

## A.6 La solution formelle du stock de la richesse financière des ménages

La linéarisation de l'équation d'accumulation de la richesse financière au voisinage de l'état stationnaire conduit à :

$$\dot{a}(t) = r^* (a(t) - \tilde{a}) - p_c (c(t) - \tilde{c}). \quad (84)$$

En substituant la solution générale de  $c(t)$  donnée par (66b) puis en résolvant, on obtient la solution générale du stock de richesse financière :

$$a(t) = \tilde{a} + [(a_0 - \tilde{a}) + \Upsilon_s^1 A_1 + \Upsilon_s^2 A_2] e^{r^* t} - \Upsilon_s^1 A_1 e^{\mu_1 t} - \Upsilon_s^2 A_2 e^{\mu_2 t}. \quad (85)$$

En invoquant la condition de transversalité, la solution stable du stock de richesse financière s'écrit de la façon suivante :

$$a(t) = \tilde{a} - \Upsilon_s^1 A_1 e^{\mu_1 t}, \quad (86)$$

compatible avec la condition de solvabilité intertemporelle

$$\tilde{a} - a_0 = -\Upsilon_s^1 (\tilde{s} - s_0), \quad (87)$$

où l'expression de  $\Upsilon_s^1$  est donnée par (79) (en posant  $i = 1$ ).

Le flux d'épargne noté  $S(t)$  correspondant à une accumulation de richesse financière  $\dot{a}(t)$  lors de l'ajustement vers l'équilibre de long terme est obtenu en différentiant la solution stable (86) par rapport au temps  $t$  :

$$S(t) = -\mu_1 \Upsilon_s^1 A_1 e^{\mu_1 t}, \quad (88)$$

où  $S(t) \leq 0$  selon que  $s(t) \geq \tilde{s}$ .

## A.7 La solution formelle de la balance commerciale

La balance commerciale mesurée en termes du bien importé est égale à la production finale domestique moins la somme des dépenses totales de consommation et d'investissement :

$$nx(t) = pF(k(t), 1) - p_c c(t) - p_I \kappa \left( \frac{q}{p_I} \right) k \left[ 1 + \frac{\psi}{2} \kappa \left( \frac{q}{p_I} \right) \right], \quad (89)$$

où nous avons substitué la solution statique de court terme de l'investissement donnée par (14).

En linéarisant au voisinage de l'état-stationnaire, la solution générale des exportations nettes s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} nx(t) = & \tilde{n}x + p_I (r^* - \chi_1) B_1 e^{\chi_1 t} + p_I (r^* - \chi_2) B_2 e^{\chi_2 t} \\ & - p_c \omega_2^1 A_1 e^{\mu_1 t} - p_c \omega_2^2 A_2 e^{\mu_2 t}, \end{aligned} \quad (90)$$

avec  $\tilde{n}x = -r^* \tilde{b}$ . La solution stable est obtenue en posant  $A_2 = B_2 = 0$ .

## B Les effets d'un choc permanent non anticipé des termes de l'échange

De façon à simplifier l'exposé des résultats analytiques et de l'ajustement de l'économie, nous supposons que le taux de dépréciation du capital physique est nul, c. a. d.  $\delta_K = 0$ . Cette hypothèse sera relâchée dans l'analyse numérique qui montre que les changements sont uniquement d'ordre quantitatif.



## B.1 L'état-stationnaire

L'état-stationnaire est obtenu en posant  $\dot{c}, \dot{s}, \dot{k}, \dot{q}, \dot{b} = 0$  et est défini par le système d'équations donné par :

$$\tilde{c} = \left[ \left( \frac{\delta + \sigma}{\delta + \sigma(1 - \gamma)} \right) p_c(p) \bar{\lambda} \right]^{-\frac{1}{\gamma + \epsilon(1 - \gamma)}}, \quad (91a)$$

$$\tilde{c} = \tilde{s}, \quad (91b)$$

$$\tilde{q} = p_I(p), \quad (91c)$$

$$r^* \tilde{q} = p F_k(\tilde{k}, 1), \quad (91d)$$

$$r^* \tilde{b} + p F(\tilde{k}, 1) - p_c(p) \tilde{c} = 0, \quad (91e)$$

et la condition de solvabilité intertemporelle

$$(b_0 - \tilde{b}) = -p_I(k_0 - \tilde{k}) - \frac{p_c(\sigma + \mu_1)}{\sigma(\mu_1 - r^*)} (s_0 - \tilde{s}). \quad (91f)$$

## B.2 Les effets à long terme

En différentiant totalement le système (25) prévalant à l'état-stationnaire (en posant au préalable  $\delta_K = 0$ ), on obtient les variations à long terme des variables macroéconomiques s'écrivent de la manière suivante :

$$\left. \frac{d\tilde{c}}{dp} \right|_{perm} = \left. \frac{d\tilde{s}}{dp} \right|_{perm} = \frac{\sigma(\mu_1 - r^*)}{\mu_1(\sigma + r^*)} \frac{(\tilde{Y} - \tilde{x})}{p_c} > 0, \quad (92a)$$

$$\left. \frac{d\bar{\lambda}}{dp} \right|_{perm} = -\frac{\bar{\lambda}}{p} \left\{ \frac{\sigma(\mu_1 - r^*)}{\mu_1(\sigma + r^*)} \frac{p(\tilde{Y} - \tilde{x})}{p_c \tilde{c}} [\gamma + \epsilon(1 - \gamma)] + \alpha_c \right\} < 0, \quad (92b)$$

$$\left. \frac{d\tilde{k}}{dp} \right|_{perm} = -\frac{F_k(1 - \alpha_I)}{p F_{kk}} > 0, \quad (92c)$$

$$\left. \frac{d\tilde{q}}{dp} \right|_{perm} = p'_I > 0, \quad (92d)$$

$$\left. \frac{d\tilde{b}}{dp} \right|_{perm} = \left. \frac{d\tilde{a}}{dp} \right|_{perm} - p_I \left. \frac{d\tilde{k}}{dp} \right|_{perm} > 0, \quad (92e)$$

où l'expression de  $d\tilde{a}/dp$  après une variation permanente des TDE est donnée par (95). Pour déterminer (92a), nous avons substitué le terme  $(\tilde{c})^{-[\gamma + \epsilon(1 - \gamma)]} \frac{[\delta + \sigma(1 - \gamma)]}{\delta + \sigma}$  par le terme  $p_c \bar{\lambda}$  en utilisant la condition du premier ordre (51a).

La variation à long terme du stock de richesse financière est obtenue en différentiant (87) par rapport à  $p$  :

$$\left. \frac{d\tilde{a}}{dp} \right|_{perm} = -\Upsilon_s^1 \left. \frac{d\tilde{s}}{dp} \right|_{perm} = -\frac{(\sigma + \mu_1)}{\mu_1(\sigma + r^*)} (\tilde{Y} - \tilde{x}) > 0, \quad (93)$$

avec  $\Upsilon_s^1 < 0$ .

## B.3 Les effets à court terme

### La réaction initiale de la consommation réelle

En résolvant l'équation (51f), en invoquant la condition de transversalité (12), en supposant que les termes de l'échange sont constants au cours du temps ( $p(t) = p$  pour toute date  $t$ ), on obtient :

$$\int_0^{\infty} p_c c(\tau) e^{-r^* \tau} d\tau = b(0) + W(0). \quad (94)$$

La richesse non financière exprimée en termes du bien étranger notée  $W(0)$  est définie comme la valeur présente du PIB moins les dépenses totales d'investissement :

$$W(0) = \int_0^{\infty} \{pF(k, 1) - p_I J\} e^{-r^* \tau} d\tau. \quad (95)$$

En substituant la solution stable de  $c(t)$  (on pose  $A_2 = 0$  dans l'équation (66b)) dans la contrainte de budget (95), on obtient une expression de la valeur de long terme de la consommation réelle  $\tilde{c}$  qui satisfait la condition de solvabilité intertemporelle :

$$\tilde{c} = \frac{r^* (\sigma + \mu_1)}{\mu_1 (\sigma + r^*)} s_0 - \frac{\sigma (r^* - \mu_1) r^* [b_0 + W(0)]}{\mu_1 (\sigma + r^*) p_c}, \quad (96)$$

où  $r^* [b_0 + W(0)] / p_c$  représente le revenu réel permanent défini comme l'annuité des richesses financière et non financière déflatées par l'indice de prix à la consommation. Par conséquent,  $-\frac{\sigma(r^* - \mu_1)}{\mu_1(\sigma + r^*)} > 0$  représente la propension marginale à consommation (PMC) le revenu réel permanent à long terme. En posant  $\gamma = 0$  dans l'équation (96), alors  $\mu_1^{\gamma=0} = -\sigma$ , de telle façon que la PMC de long terme est égale à l'unité. En revanche, lorsque les préférences sont non séparables dans le temps, c'est-à-dire tant que  $\gamma > 0$ , la PMC de long terme est supérieure à l'unité.

En évaluant la solution stable de la consommation réelle en  $t = 0$ , et en utilisant le fait que  $\tilde{s} = \tilde{c}$  dont l'expression est donnée par (96), on peut exprimer le niveau initial optimal de la consommation réelle en fonction du revenu réel permanent :

$$c(0) = \frac{(\sigma + \mu_1)}{(\sigma + r^*)} s_0 + \frac{(r^* - \mu_1) r^* [b_0 + W(0)]}{(\sigma + r^*) p_c}. \quad (97)$$

where  $0 < \frac{(r^* - \mu_1)}{(\sigma + r^*)} < 1$  représente la propension marginale à consommer le revenu réel permanent de court terme.

### La réaction initiale de la balance courante

La réaction initiale de la balance courante est donnée par :

$$\left. \frac{dca(0)}{dp} \right|_{perm} = \left. \frac{dS(0)}{dp} \right|_{perm} - p_I \left. \frac{dI(0)}{dp} \right|_{perm} = \mu_1 \Upsilon_s^1 \left. \frac{d\tilde{s}}{dp} \right|_{perm} + \chi_1 p_I \left. \frac{d\tilde{k}}{dp} \right|_{perm}.$$

La condition pour que le solde courant soit négatif après une détérioration permanente des TDE s'écrit de la façon suivante :

$$\left. \frac{dca(0)}{dp} \right|_{perm} > 0 \quad \text{ou} \quad \left. \frac{d\tilde{a}}{dp} \right|_{perm} > \frac{\chi_1}{\mu_1} p_I \left. \frac{d\tilde{k}}{dp} \right|_{perm}. \quad (98)$$

Une condition nécessaire pour que le solde courant se détériore à court terme est donnée par l'hypothèse 1. D'après cette hypothèse, l'inégalité  $\mu_1 < \chi_1 < 0$  garantit que le solde courant se détériore à court terme et s'ajuste de manière non monotone.

## C Procédure analytique de détermination des solutions formelles et choc transitoire non anticipé des termes de l'échange

Dans cette section, nous présentons les différentes conduisant aux solutions analytiques après un choc temporaire des termes de l'échange. De façon à limiter la complexité des solutions, nous supposons que le taux de dépréciation du capital physique est nul car cela ne modifie pas les résultats de manière qualitative. Cette hypothèse est relâchée dans l'analyse numérique.

En adoptant la démarche proposée par Schubert and Turnovsky [2002], nous définissons un état-stationnaire *viable*  $i$  comme un état-stationnaire débutant à la date  $T_i$  qui est compatible avec la condition de solvabilité intertemporelle, étant donné les stocks initiaux d'actifs étrangers,  $b_{T_i}$ , d'habitudes de consommation,  $s_{T_i}$ , et de capital physique,  $k_{T_i}$ . Nous réécrivons le système d'équations (25) pour une période arbitraire  $i$ :

$$\tilde{c}_i = \left[ \left( \frac{\delta + \sigma}{\delta + \sigma(1 - \gamma)} \right) p_c(p_i) \bar{\lambda} \right]^{-\frac{1}{\gamma + \epsilon(1 - \gamma)}}, \quad (99a)$$

$$\tilde{c}_i = \tilde{s}_i, \quad (99b)$$

$$\tilde{q}_i = p_I(p_i), \quad (99c)$$

$$r^* p_I(p_i) = p_i F_k(\tilde{k}_i, 1), \quad (99d)$$

$$r^* \tilde{b}_i + p_i F(\tilde{k}_i, 1) - p_c(p_i) \tilde{c}_i = 0, \quad (99e)$$

et la condition de solvabilité intertemporelle

$$(b_{T_i} - \tilde{b}_i) = -p_I(p_i) (k_{T_i} - \tilde{k}_i) - \frac{p_c(p_i) (\sigma + \mu_1)}{\sigma (\mu_1 - r^*)} (s_{T_i} - \tilde{s}_i) .. \quad (99f)$$

La nouvelle procédure appropriée exige de procéder en deux étapes. Dans une **première étape**, on résout le système (99a)-(99e) pour exprimer  $\tilde{s}_i$ ,  $\tilde{c}_i$ ,  $\tilde{k}_i$ ,  $\tilde{q}_i$ , et  $\tilde{b}_i$  comme des fonctions de l'utilité marginale de la richesse,  $\bar{\lambda}_i$ , et des termes de l'échange,  $p_i$ . En différentiant totalement (99a)-(99e), on obtient sous forme matricelle :

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_{cc} + \frac{\sigma}{\delta + \sigma} \tilde{u}_{sc} & \tilde{u}_{cs} + \frac{\sigma}{\delta + \sigma} \tilde{u}_{ss} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_i F_{kk} & 0 \\ -p_c(p_i) & 0 & p_i F_k & r^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tilde{c}_i \\ d\tilde{s}_i \\ d\tilde{k}_i \\ d\tilde{b}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_c(p_i) d\bar{\lambda}_i + p'_c(p_i) \bar{\lambda} dp_i \\ 0 \\ -F_k(1 - \alpha_I) dp_i \\ -(\tilde{Y}_i - \tilde{x}_i) dp_i \end{pmatrix}, \quad (100)$$

et

$$d\tilde{q}_i = p'_I(p_i) dp_i, \quad (101)$$

avec

$$\tilde{u}_{cc} + \frac{\sigma}{\delta + \sigma} \tilde{u}_{sc} = -\frac{\tilde{c}^{-1} \tilde{c}^{-[\gamma + \epsilon(1-\gamma)]}}{\delta + \sigma} \{ \epsilon [\delta + \sigma(1-\gamma)] + \sigma\gamma \} < 0, \quad (102a)$$

$$\tilde{u}_{cs} + \frac{\sigma}{\delta + \sigma} \tilde{u}_{ss} = \frac{\tilde{c}^{-1} \tilde{c}^{-[\gamma + \epsilon(1-\gamma)]}}{\delta + \sigma} \gamma \{ \sigma\gamma - (1-\epsilon) [\delta + \sigma(1-\gamma)] \} > 0. \quad (102b)$$

Les variables  $\bar{\lambda}_i$  and  $p_i$  déterminent les fonctions prévalant à long terme suivantes :

$$\tilde{s}_i = \tilde{c}_i = m(\bar{\lambda}_i, p_i), \quad (103a)$$

$$\tilde{k}_i = k(p_i), \quad (103b)$$

$$\tilde{q}_i = p_I(p_i), \quad (103c)$$

$$\tilde{b}_i = v(\bar{\lambda}_i, p_i), \quad (103d)$$

où les dérivées partielles des fonctions de long terme sont données par :

$$m_{\bar{\lambda}} \equiv \frac{\partial \tilde{s}_i}{\partial \bar{\lambda}_i} = -\frac{r^* p_i F_{kk} p_c}{G} = -\frac{\tilde{c}_i}{\bar{\lambda}} \left[ \frac{1}{\gamma + \epsilon(1-\gamma)} \right] < 0, \quad (104a)$$

$$m_p \equiv \frac{\partial \tilde{s}_i}{\partial p_i} = -\frac{r^* p_i F_{kk} p'_c \bar{\lambda}_i}{G} = -\frac{\tilde{x}_i}{p_c} \left[ \frac{1}{\gamma + \epsilon(1-\gamma)} \right] < 0, \quad (104b)$$

$$k_p \equiv \frac{\partial \tilde{k}_i}{\partial p_i} = -\frac{F_k(1-\alpha_I)}{p_i F_{kk}} > 0, \quad (104c)$$

$$v_{\bar{\lambda}} \equiv \frac{\partial \tilde{b}_i}{\partial \bar{\lambda}_i} = -\frac{p_i F_{kk} (p_c)^2}{G} = \frac{p_c}{r^*} m_{\bar{\lambda}} < 0, \quad (104d)$$

$$\begin{aligned} v_p \equiv \frac{\partial \tilde{b}_i}{\partial p_i} &= -\frac{\left[ p_i F_k^2 (1-\alpha_I) - p_i F_{kk} (\tilde{Y}_i - \tilde{x}_i) \right] \left[ u_{cc} + \frac{\delta + 2\sigma}{\delta + \sigma} \tilde{\Gamma} \right] - \frac{p_i F_{kk} p'_c p_c \bar{\lambda}_i}{G}}{G} \\ &= -\frac{F_{kk}}{G} (p_c)^2 \bar{\lambda} \left\{ \left[ p_i F_k \tilde{k}_i \beta_K (1-\alpha_I) + p_i (\tilde{Y}_i - \tilde{x}_i) \right] \frac{[\gamma + \epsilon(1-\gamma)]}{p_c \tilde{c}_i} + \alpha_c \right\} \\ &= -p_I k_p + \frac{p_c}{r^*} m_p - \frac{(\tilde{Y}_i - \tilde{x}_i)}{r^*} < 0, \end{aligned} \quad (104e)$$

où nous notons  $\beta_K = -\frac{F_k}{F_{kkk}} > 0$  et le déterminant  $G$  est donné par :

$$G \equiv -r^* p_i F_{kk} \left\{ \tilde{u}_{cc} + \frac{\delta + 2\sigma}{\delta + \sigma} \tilde{\Gamma} \right\}, \quad (105)$$

$$\equiv r^* p_i F_{kk} \tilde{c}_i^{-[\gamma + \epsilon(1-\gamma)]} \tilde{c}_i^{-1} \frac{[\delta + \sigma(1-\gamma)]}{\delta + \sigma} [\gamma + \epsilon(1-\gamma)] < 0,$$

$$\equiv r^* p_i F_{kk} \frac{p_c \bar{\lambda}_i}{\tilde{c}_i} [\gamma + \epsilon(1-\gamma)] \quad (106)$$

où nous avons substitué (50f) pour aboutir à (106).

En substituant la fonction (103a) définissant la valeur de long terme de la consommation réelle dans la condition de solvabilité intertemporelle des ménages (87), nous pouvons exprimer la valeur de long terme du stock de richesse financière en fonction de l'utilité marginale de la richesse et des termes de l'échange :

$$\tilde{a} = a(\bar{\lambda}_i, p_i), \quad a_{\bar{\lambda}} < 0, \quad a_p < 0. \quad (107)$$

La **deuxième étape** consiste à déterminer la variation de la valeur d'équilibre de l'utilité marginale de la richesse  $d\bar{\lambda}_i$  en différentiant de manière totale l'équation (99f) :

$$[v_{\bar{\lambda}} \Upsilon_s^1 m_{\bar{\lambda}}] d\bar{\lambda}_i = db_{T_i} + p_I dk_{T_i} + \Upsilon_s^1 ds_{T_i} - [v_p + p_I k_p + \Upsilon_s^1 m_p] dp_i, \quad (108)$$

d'où l'on déduit les dérivées partielles suivantes :

$$\lambda_p \equiv \frac{d\bar{\lambda}_i}{dp_i} = -\frac{v_p + p_I k_p + \Upsilon_s^1 m_p}{v_{\bar{\lambda}} + \Upsilon_s^1 m_{\bar{\lambda}}} < 0, \quad (109a)$$

$$\lambda_b \equiv \frac{d\bar{\lambda}_i}{db_{T_i}} = \frac{1}{v_{\bar{\lambda}} + \Upsilon_s^1 m_{\bar{\lambda}}} = \frac{G}{D} < 0, \quad (109b)$$

$$\lambda_s \equiv \frac{d\bar{\lambda}_i}{ds_{T_i}} = \frac{\Upsilon_s^1}{v_{\bar{\lambda}} + \Upsilon_s^1 m_{\bar{\lambda}}} > 0, \quad (109c)$$

$$\lambda_k \equiv \frac{d\bar{\lambda}_i}{dk_{T_i}} = \frac{p_I}{v_{\bar{\lambda}} + \Upsilon_s^1 m_{\bar{\lambda}}} > 0, \quad (109d)$$

We may solve for the equilibrium value of  $\bar{\lambda}_i$  as a function of initial stocks at time  $T_i$  and terms of trade:

$$\bar{\lambda} = g(s_{T_i}, k_{T_i}, b_{T_i}, p_i), \quad \lambda_s > 0, \quad \lambda_k < 0, \quad \lambda_b < 0, \quad \lambda_p < 0. \quad (110)$$

### Démarche analytique de détermination des solutions formelles après un choc transitoire non anticipé des termes de l'échange

On suppose que la petite économie ouverte est initialement à l'état stationnaire (on pose  $i = 0$  dans les fonctions de long terme) :

$$s_0 = \tilde{s}_0 = m(\bar{\lambda}_0, p_0) = \quad (111a)$$

$$k_0 = \tilde{k}_0 = k(p_0), \quad (111b)$$

$$q_0 = \tilde{q}_0 = p_I(p_0), \quad (111c)$$

$$b_0 = \tilde{b}_0 = v(\bar{\lambda}_0, p_0), \quad (111d)$$

$$\lambda_0 = \bar{\lambda}_0 = \lambda(s_0, k_0, b_0, p_0). \quad (111e)$$

On suppose que les termes de l'échange se modifient à la date  $t = 0$  et passent du niveau  $p_0$  au niveau  $p_1$  au cours de la période  $0 \leq t < T$ , et qu'ils reviennent à la date  $T$  de façon permanente à leur niveau initial  $p_T = p_2 = p_0$ .

*Période 1* ( $0 \leq t < T$ )

Lorsque le choc transitoire des termes de l'échange est à l'oeuvre, l'économie emprunte des sentiers qui sont instables :

$$s(t) = \tilde{s}_1 + A_1 e^{\mu_1 t} + A_2 e^{\mu_2 t}, \quad (112a)$$

$$c(t) = \tilde{c}_1 + A_1 \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) e^{\mu_1 t} + A_2 \left( \frac{\sigma + \mu_2}{\sigma} \right) e^{\mu_2 t}, \quad (112b)$$

$$k(t) = \tilde{k}_1 + B_1 e^{\chi_1 t} + B_2 e^{\chi_2 t}, \quad (112c)$$

$$q(t) = \tilde{q}_1 + B_1 \left( \frac{p_I \chi_1}{\kappa'(1) \tilde{k}} \right) e^{\chi_1 t} + B_2 \left( \frac{p_I \chi_2}{\kappa'(1) \tilde{k}} \right) e^{\chi_2 t}, \quad (112d)$$

$$b(t) = \tilde{b}_1 + \left[ (b_0 - \tilde{b}_1) + p_I B_1 + p_I B_2 + \Upsilon_s^1 A_1 + \Upsilon_s^2 A_2 \right] e^{r^* t} - p_I B_1 e^{\chi_1 t} - p_I B_2 e^{\chi_2 t} - \Upsilon_s^1 A_1 e^{\mu_1 t} - \Upsilon_s^2 A_2 e^{\mu_2 t}, \quad (112e)$$

où les valeurs de long terme  $\tilde{s}_1$ ,  $\tilde{c}_1$ ,  $\tilde{k}_1$ ,  $\tilde{q}_1$ , and  $\tilde{b}_1$  sont données par les fonctions suivantes

(on pose  $i = 1$ )

$$\tilde{s}_1 = \tilde{c}_1 = m(\bar{\lambda}, p_1), \quad (113a)$$

$$\tilde{k}_1 = k(p_1), \quad (113b)$$

$$\tilde{q}_1 = p_I(p_1) \quad (113c)$$

$$\tilde{b}_1 = v(\bar{\lambda}, p_1). \quad (113d)$$

*Période 2* ( $t \geq T$ )

Une fois que les termes de l'échange reviennent à leur niveau initial, l'économie emprunte des sentiers stables :

$$s(t) = \tilde{s}_2 + A'_1 e^{\mu_1 t}, \quad (114a)$$

$$c(t) = \tilde{c}_2 + A'_1 \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) e^{\mu_1 t}, \quad (114b)$$

$$k(t) = \tilde{k}_2 + B'_1 e^{\chi_1 t}, \quad (114c)$$

$$q(t) = \tilde{q}_2 + B'_1 \left( \frac{p_I \chi_1}{\kappa'(1) \tilde{k}} \right) e^{\chi_1 t}, \quad (114d)$$

$$b(t) = \tilde{b}_2 - p_I B'_1 e^{\chi_1 t} - \frac{p_c(\sigma + \mu_1)}{\sigma(\mu_1 - r^*)} A'_1 e^{\mu_1 t}, \quad (114e)$$

où les valeurs de long terme  $\tilde{s}_2$ ,  $\tilde{c}_2$ ,  $\tilde{k}_2$ ,  $\tilde{q}_2$ , et  $\tilde{b}_2$  sont données par les fonctions suivantes (on pose  $i = 2$ )

$$\tilde{s}_2 = \tilde{c}_2 = t(\bar{\lambda}, p_2), \quad (115a)$$

$$\tilde{k}_2 = k(p_2), \quad (115b)$$

$$\tilde{q}_2 = p_I(p_2) \quad (115c)$$

$$\tilde{b}_2 = v(\bar{\lambda}, p_2). \quad (115d)$$

Au cours de la période 1, l'économie modifie ses stocks d'habitudes de consommation, de capital physique et d'actifs étrangers. Puisque cette période est instable, si l'économie se situait sans cesse le long des sentiers de la période 1, alors elle ne respecterait plus la condition de solvabilité intertemporelle. En revanche, l'ajustement réalisé par l'économie au cours de la période 2 est stable car il satisfait la contrainte de budget intertemporelle. Le problème de valeur propre nulle exige que l'utilité marginale de la richesse s'ajuste d'un "seul coup" dès la réalisation du choc puis reste constante au cours des périodes 1 et 2. L'objectif de la procédure analytique en deux étapes est d'évaluer la variation de  $\lambda$  de telle façon que l'économie respecte son unique condition de solvabilité intertemporelle, étant donné les conditions initiales  $k_T$ ,  $b_T$  et  $s_T$  une fois que le choc temporaire prend fin, ces stocks ayant été accumulés lors de la période instable. Par conséquent, pour que le petit pays demeure soluble, nous imposons la condition de solvabilité intertemporelle suivante :

$$b_T - \tilde{b}_2 = -p_I(k_T - \tilde{k}_2) - \Upsilon_s^1(s_T - \tilde{s}_2). \quad (116)$$

*Les conditions requises pour déterminer les solutions formelles après un choc transitoire des termes de l'échange*

Pour déterminer les six constantes  $A_1, A_2, A'_1, B_1, B_2, B'_1$ , et la valeur d'équilibre de l'utilité marginale de la richesse, nous imposons les 4 conditions suivantes :

1. Les conditions initiales  $b(0) = b_0, k(0) = k_0, s(0) = s_0$  sont initialement prédéterminées.
2. Le stock d'habitudes  $s$  et le stock de capital physique  $k$  soivent rester continus à la date  $T$ .
3. La consommation réelle effectue un "saut" discret à la date  $T$  lorsque le choc transitoire cesse.
4. La condition de solvabilité intertemporelle (116) doit être vérifiée.<sup>1</sup>

La condition 3 qui est moins habituelle exige une interprétation plus formelle. Pour clarifier ce point, nous réécrivons (51a) sans adopter de forme particulière pour les préférences par soucis de clarté. A la date  $t = T^-$ , nous avons

$$u_c [c(T^-), s(T^-)] + \sigma \xi(T^-) = p_c [p(T^-)] \bar{\lambda}. \quad (117)$$

où  $p(T^-) = p_1$ . En rappelant que le stock d'habitudes,  $s$ , et son prix implicite,  $\xi$ , sont continus et l'utilité marginale de la richesse,  $\lambda$ , opère un "saut" unique en  $t = 0$  et reste constante après, la consommation réelle soit effectuer un "saut" à la date  $T$  pour que la condition statique (117) soit vérifiée. Cela s'explique par le fait que le stock d'habitudes est une variable d'état qui s'ajuste de manière continue. Comme la seule variable permettant de garantir l'égalité entre l'utilité marginale de consommation courante et son coût marginal est la consommation réelle, cette dernière doit se modifier à la date  $T$  lorsque les termes de l'échange s'établissent de nouveau à leur niveau initial.

Nous devons maintenant évaluer la variation de la consommation réelle à la date  $T$ . En premier lieu, nous évaluons (51a) à la date  $t = T^+$  sans adopter de forme particulière pour les préférences par soucis de clarté :

$$u_c [c(T^+), s(T^+)] + \sigma \xi(T^+) = p_c [p(T^+)] \bar{\lambda}. \quad (118)$$

where  $p(T^-) = p_2 = p_0$ .

En rappelant que  $s(T^-) = s(T^+) = s(T)$ ,  $\xi(T^-) = \xi(T^+) = \xi(T)$ , en retranchant (117) de (118), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & u_c [c(T^+), s(T)] + \sigma \xi(T) - u_c [c(T^-), s(T)] - \sigma \xi(T) \\ &= -\bar{\lambda} \{p_c(p_2) - p_c(p_1)\}. \end{aligned}$$

Puis en utilisant le fait que  $-(-1)^\tau dp(T) \equiv p_2 - p_1$ , on obtient :

$$u_{cc} [c(T^-), s(T)] dc(T) = -p'_c [p(T^-)] \bar{\lambda} (-1)^\tau dp(T).$$

A partir de cette égalité, on est en mesure d'évaluer le "saut" de la consommation réelle à la date  $T$  :

$$\frac{dc(T)}{dp(T)} = \frac{p'_c(p_0) \bar{\lambda}}{u_{cc} [c(T^-), s(T)]} = -(-1)^\tau \kappa, \quad (119)$$

ou encore

$$dc(T) = \frac{p'_c(p_0) \lambda_0}{u_{cc}[c(T^-), s(T)]} (-1)^\tau dp = \kappa (-1)^\tau dp. \quad (120)$$

où nous avons utilisé le fait que  $(-1)^\tau dp \equiv p_2 - p_1$ . Nous avons noté  $\kappa$  le terme suivant :

$$\kappa \equiv \frac{p'_c(p_0) \bar{\lambda}}{u_{cc}[c(T^-), s(T)]} \cong \frac{p'_c(p_0) \lambda_0}{u_{cc}[\tilde{c}_0, \tilde{s}_0]}, \quad (121)$$

où nous avons effectué une approximation du terme du membre de droite de (121) en supposant que les valeurs prévalaient à la période 0 (période initiale) de façon à obtenir une solution analytique.

#### *Détermination des solutions formelles*

En posant  $t = 0$  dans la solution (112a), en égalisant (112a) and (114a), (112b) and (114b), (112c) and (114c), (112d) and (114d) évaluées à la date  $t = T$ , on obtient :

$$\tilde{s}_1 + A_1 + A_2 = s_0, \quad (122a)$$

$$\tilde{s}_1 + A_1 e^{\mu_1 T} + A_2 e^{\mu_2 T} = \tilde{s}_2 + A'_1 e^{\mu_1 T}, \quad (122b)$$

$$\tilde{c}_1 + dc(T) + A_1 \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) e^{\mu_1 T} + A_2 \left( \frac{\sigma + \mu_2}{\sigma} \right) e^{\mu_2 T} = \tilde{c}_2 + A'_1 \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) e^{\mu_1 T}, \quad (122c)$$

$$\tilde{k}_1 + B_1 + B_2 = k_0, \quad (122d)$$

$$\tilde{k}_1 + B_1 e^{\chi_1 T} + B_2 e^{\chi_2 T} = \tilde{k}_2 + B'_1 e^{\chi_1 T}, \quad (122e)$$

$$\tilde{q}_1 + \varpi_2^1 B_1 e^{\chi_1 T} + \varpi_2^2 B_2 e^{\chi_2 T} = \tilde{q}_2 + B'_1 \varpi_2^1 e^{\chi_1 T}, \quad (122f)$$

où nous utilisons la condition de continuité de  $s(t)$  et le “saut” requis de  $c(t)$  à la date  $T$ .

En évaluant  $s_T$ ,  $k_T$  et  $b_T$  à partir respectivement de (112a), (112c) et (112e), en substituant ces valeurs dans (116), et en substituant les fonctions de long terme de  $\tilde{s}_i$ ,  $\tilde{k}_i$ ,  $\tilde{b}_i$  données par (103), la condition de solvabilité intertemporelle est réécrite de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & v(\bar{\lambda}, p_1) + \{ (v(\lambda_0, p_0) - v(\bar{\lambda}, p_1)) - p_I B_1 - p_I B_2 + \Upsilon_s^1 A_1 + \Upsilon_s^2 A_2 \} e^{r^* T} \\ & + p_I B_1 e^{\chi_1 T} + p_I B_2 e^{\chi_2 T} - \Upsilon_s^1 A_1 e^{\mu_1 T} - \Upsilon_s^2 A_2 e^{\mu_2 T} - v(\bar{\lambda}, p_2) \\ = & p_I [k(p_1) + B_1 e^{\chi_1 T} + B_2 e^{\chi_2 T} - k(p_2)] \\ & - \Upsilon_s^1 [m(\bar{\lambda}, p_1) + A_1 e^{\mu_1 T} + A_2 e^{\mu_2 T} - m(\bar{\lambda}, p_2)]. \end{aligned} \quad (123)$$

Nous définissons la variable muette notée  $\tau$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} \tau = 1 & \text{pour un choc transitoire non anticipé à la période 1,} \\ \tau = 0 & \text{pour un choc futur permanent anticipé à la période 2,} \end{cases}$$

de façon à évaluer les solutions formelles pour ces deux types de chocs.



Nous réalisons une approximation par les différentielles en adoptant la notation

$$\tilde{s}_1 - \tilde{s}_0 \equiv m(\bar{\lambda}, p_1) - m(\lambda_0, p_0) = m_{\bar{\lambda}} d\bar{\lambda} + m_p \tau dp, \quad (124a)$$

$$\tilde{s}_2 - \tilde{s}_1 \equiv m(\bar{\lambda}, p_2) - m(\bar{\lambda}, p_1) = m_p (-1)^\tau dp, \quad (124b)$$

$$\tilde{k}_1 - \tilde{k}_0 \equiv k(p_1) - k(p_0) = k_p \tau dp, \quad (124c)$$

$$\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1 \equiv k(p_2) - k(p_1) = k_p (-1)^\tau dp, \quad (124d)$$

$$\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1 \equiv p_I(p_2) - p_I(p_1) = (-1)^\tau p'_I dp, \quad (124e)$$

$$\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0 \equiv v(\bar{\lambda}, p_1) - v(\lambda_0, p_0) = v_{\bar{\lambda}} d\bar{\lambda} + v_p \tau dp, \quad (124f)$$

$$\tilde{b}_2 - \tilde{b}_1 \equiv v(\bar{\lambda}, p_2) - v(\bar{\lambda}, p_1) = v_p (-1)^\tau dp, \quad (124g)$$

où  $d\bar{\lambda} \equiv \bar{\lambda} - \lambda_0$ . En substituant ces expressions dans (122) et (123), on obtient finalement :

$$A_1 + A_2 = -m_{\bar{\lambda}} d\bar{\lambda} - m_p \tau dp, \quad (125a)$$

$$A_1 e^{\mu_1 T} + A_2 e^{\mu_2 T} - A'_1 e^{\mu_1 T} = m_p (-1)^\tau dp, \quad (125b)$$

$$A_1 \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) e^{\mu_1 T} + A_2 \left( \frac{\sigma + \mu_2}{\sigma} \right) e^{\mu_2 T} - A'_1 \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) e^{\mu_1 T} = (m_p - \kappa) (-1)^\tau dp, \quad (125c)$$

$$B_1 + B_2 = -k_p \tau dp, \quad (125d)$$

$$B_1 e^{\chi_1 T} + B_2 e^{\chi_2 T} - B'_1 e^{\chi_1 T} = k_p (-1)^\tau dp, \quad (125e)$$

$$\varpi_2^1 B_1 e^{\chi_1 T} + \varpi_2^2 B_2 e^{\chi_2 T} - \varpi_2^1 B'_1 e^{\chi_1 T} = p'_I (-1)^\tau dp, \quad (125f)$$

avec l'expression de  $\kappa$  donnée par (121), et

$$A_1 \Upsilon_s^1 + A_2 \Omega_1 + p_I B_1 + p_I B_2 - v_{\bar{\lambda}} d\bar{\lambda} = \Phi_1, \quad (126)$$

où l'expression de  $\Upsilon_s^1$  est donnée par (79) et nous avons posé

$$\Omega_1 \equiv [\Upsilon_s^1 - \Upsilon_s^2] e^{(\mu_2 - r^*)T} + \Upsilon_s^2, \quad (127a)$$

$$\Phi_1 \equiv \left[ v_p \tau + (v_p + p_I k_p + \Upsilon_s^1 m_p) e^{-r^* T} (-1)^\tau \right] dp. \quad (127b)$$

Le système composé de l'équation (126) et des six équations (125a)-(125f) s'écrit sous

forme matricielle :

$$\begin{pmatrix}
\Upsilon_s^1 & \Omega_1 & 0 & p_I & p_I & 0 & -v_{\bar{\lambda}} \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{\bar{\lambda}} \\
e^{\mu_1 T} & e^{\mu_2 T} & -e^{\mu_1 T} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\omega_2^1 e^{\mu_1 T} & \omega_2^2 e^{\mu_2 T} & -\omega_2^1 e^{\mu_1 T} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & e^{\chi_1 T} & e^{\chi_2 T} & -e^{\chi_1 T} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \varpi_2^1 e^{\chi_1 T} & \varpi_2^2 e^{\chi_2 T} & -\varpi_2^1 e^{\chi_1 T} & 0
\end{pmatrix}
\times
\begin{pmatrix}
A_1 \\
A_2 \\
A'_1 \\
B_1 \\
B_2 \\
B'_1 \\
d\bar{\lambda}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\Phi_1 \\
-m_p \tau dp \\
m_p (-1)^\tau dp \\
(m_p - \kappa) (-1)^\tau dp \\
-k_p \tau dp \\
k_p (-1)^\tau dp \\
p'_I (-1)^\tau dp
\end{pmatrix}. \quad (128)$$

Le déterminant noté  $E$  associé à la matrice des coefficients du système matriciel (128) s'écrit de la manière suivante :

$$E \equiv - (v_{\bar{\lambda}} + \Upsilon_s^1 m_{\bar{\lambda}}) (\omega_2^2 - \omega_2^1) e^{r^* T} (\varpi_2^2 - \varpi_2^1) e^{r^* T} > 0, \quad (129)$$

avec  $\omega_2^2 - \omega_2^1 = \frac{m\mu_2 - \mu_1}{\sigma} > 0$  et  $\varpi_2^2 - \varpi_2^1 = \frac{p_I(\chi_2 - \chi_1)}{\kappa'(1)\bar{k}} > 0$ .

Les expressions des constantes sont données par :

$$\begin{aligned}
\frac{A_1}{dp} &= -m_{\bar{\lambda}} \lambda_p \left( \tau + e^{-r^* T} (-1)^\tau \right) - m_p \tau + \frac{\sigma}{\mu_2 - \mu_1} e^{-\mu_2 T} \left( \frac{\mu_1}{\sigma} m_p + \kappa \right) (-1)^\tau \\
&\quad - \frac{r^*}{r^* - \mu_2} \frac{\sigma}{\mu_1} \left( e^{-r^* T} - e^{-\mu_2 T} \right) \left( \frac{\mu_1}{\sigma} m_p + \kappa \right) (-1)^\tau, \quad (130a)
\end{aligned}$$

$$\frac{A_2}{dp} = -\frac{\sigma}{\mu_2 - \mu_1} e^{-\mu_2 T} \left( \frac{\mu_1}{\sigma} m_p + \kappa \right) (-1)^\tau, \quad (130b)$$

$$\begin{aligned}
\frac{A'_1}{dp} &= \frac{A_1}{dp} + \frac{A_2}{dp} e^{(\mu_2 - \mu_1) T} - m_p (-1)^\tau e^{-\mu_1 T}, \\
&= -m_{\bar{\lambda}} \lambda_p \left( \tau + e^{-r^* T} (-1)^\tau \right) - m_p \tau + \frac{\sigma}{\mu_2 - \mu_1} e^{-\mu_2 T} \left( \frac{\mu_1}{\sigma} m_p + \kappa \right) (-1)^\tau \\
&\quad - \frac{r^*}{r^* - \mu_2} \frac{\sigma}{\mu_1} \left( e^{-r^* T} - e^{-\mu_2 T} \right) \left( \frac{\mu_1}{\sigma} m_p + \kappa \right) (-1)^\tau \\
&\quad - \frac{\sigma}{\mu_2 - \mu_1} e^{-\mu_1 T} \left( \frac{\mu_1}{\sigma} m_p + \kappa \right) (-1)^\tau - m_p (-1)^\tau e^{-\mu_1 T}, \quad (130c)
\end{aligned}$$

$$\frac{B_1}{dp} = -k_p \tau + \left( \frac{\chi_1}{\chi_2 - \chi_1} \right) e^{-\chi_2 T} k_p (-1)^\tau - \frac{\kappa'(1)\bar{k}}{p_I} \frac{1}{\chi_2 - \chi_1} e^{-\chi_2 T} p'_I (-1)^\tau, \quad (130d)$$

$$\frac{B_2}{dp} = -\left( \frac{\chi_1}{\chi_2 - \chi_1} \right) e^{-\chi_2 T} k_p (-1)^\tau + \frac{\kappa'(1)\bar{k}}{p_I} \frac{1}{\chi_2 - \chi_1} e^{-\chi_2 T} p'_I (-1)^\tau, \quad (130e)$$

$$\frac{B'_1}{dp} = \frac{B_1}{dp} - \left( \frac{\chi_2}{\chi_2 - \chi_1} \right) e^{-\chi_1 T} k_p (-1)^\tau + \frac{\kappa'(1)\bar{k}}{p_I} \frac{1}{\chi_2 - \chi_1} e^{-\chi_1 T} p'_I (-1)^\tau, \quad (130f)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{\lambda}}{dp} &= \lambda_p \left( \tau + (-1)^\tau e^{-r^* T} \right) \\
&\quad + \frac{r^*}{r^* - \mu_2} \frac{\sigma}{\mu_1} \frac{1}{m_{\bar{\lambda}}} \left( e^{-r^* T} - e^{-\mu_2 T} \right) \left( \frac{\mu_1}{\sigma} m_p + \kappa \right) (-1)^\tau, \quad (130g)
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\lambda_b [v_{\bar{\lambda}} + \Upsilon_s^1 m_{\bar{\lambda}}] &= 1, \\
\lambda_b [v_p + p_I k_p \Upsilon_s^1 m_p] &= -\lambda_p, \\
\lambda_b m_p \frac{p_c (\sigma + r^*)}{\sigma (\mu_1 - r^*)} &= \frac{p'_c \bar{\lambda} r^*}{p_c \mu_1}, \\
v_{\bar{\lambda}} = \frac{p_c}{r^*} m_{\bar{\lambda}}, \quad m_p &= \frac{p'_c \bar{\lambda}}{p_c} m_{\bar{\lambda}}, \\
v_p + p_I k_p - \frac{p_c}{r^*} m_p &= -\left(\frac{\tilde{Y} - \tilde{x}}{r^*}\right) < 0, \\
\frac{1}{\lambda_b} = v_{\bar{\lambda}} + \Upsilon_s^1 m_{\bar{\lambda}} &= \frac{p_c \mu_1 (\sigma + r^*)}{r^* \sigma (\mu_1 - r^*)} m_{\bar{\lambda}} < 0, \\
\Upsilon_s^1 - \Upsilon_s^2 &= \left(\frac{p_c (\sigma + \mu_1)}{\sigma (\mu_1 - r^*)} - \frac{p_c (\sigma + \mu_2)}{\sigma (\mu_2 - r^*)}\right) = \frac{p_c (\sigma + r^*) (\mu_2 - \mu_1)}{\sigma (\mu_1 - r^*) (\mu_2 - r^*)} < 0, \\
v_{\bar{\lambda}} + \Omega_1 m_{\bar{\lambda}} &= \left\{ \frac{p_c (\sigma + r^*) (\mu_2 - \mu_1)}{\sigma (\mu_1 - r^*) (\mu_2 - r^*)} e^{(\mu_2 - r^*)T} + \frac{p_c \mu_2 (\sigma + r^*)}{r^* \sigma (\mu_2 - r^*)} \right\} m_{\bar{\lambda}}, \\
\Upsilon_s^1 - \Omega_1 &= \frac{p_c (\sigma + r^*) (\mu_2 - \mu_1)}{\sigma (\mu_1 - r^*) (\mu_2 - r^*)} \left(1 - e^{(\mu_2 - r^*)T}\right), \quad j = O, I, \\
\Phi_1 m_{\bar{\lambda}} - v_{\bar{\lambda}} m_p \tau dp &= -\left[ \left(\frac{y - \tilde{x}}{r^*}\right) \tau + \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_b}\right) e^{-r^*T} (-1)^\tau \right] m_{\bar{\lambda}} dp.
\end{aligned}$$

En déterminant d'abord l'expression formelle du terme  $\kappa$ :

$$\kappa = -\frac{\tilde{x}}{p_c} \frac{[\delta + \sigma (1 - \gamma)]}{\epsilon (\delta + \sigma)} < 0, \quad (131)$$

nous pouvons ensuite évaluer l'expression formelle du terme  $\left(\frac{\mu_1}{\sigma} m_p + \kappa\right)$  qui s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_1}{\sigma} m_p + \kappa &= -\frac{\tilde{x}}{p_c} \left\{ \frac{\epsilon (\delta + \sigma) (\sigma + \mu_1) - \sigma \gamma [\sigma \epsilon - (1 - \epsilon) [\delta + \sigma (1 - \gamma)]]}{\sigma \epsilon (\delta + \sigma) [\gamma + \epsilon (1 - \gamma)]} \right\}, \\
&= \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \frac{\mu_1}{\delta + \sigma} m_p > 0.
\end{aligned} \quad (132)$$

Nous avons substitué l'expression de  $m_p$  donnée par (104b) and nous avons utilisé (65).

## D Un choc temporaire non anticipé des termes de l'échange : les effets à court terme et à long terme

Pour un choc temporaire non anticipé des termes de l'échange, la variable muette  $\tau$  prend une valeur égale à l'unité.

### D.1 Le bloc de consommation

#### Les variations à long terme

En introduisant  $\tau = 1$  dans (130g), la variation de la valeur d'équilibre de  $\bar{\lambda}$  s'écrit de la façon suivante :

$$\left. \frac{d\bar{\lambda}}{dp} \right|_{temp} = \lambda_p \left(1 - e^{-r^*T}\right) - \left(\frac{r^*}{\mu_1}\right) \left(\frac{\sigma + \mu_1}{\sigma + r^*}\right) \frac{p'_c \bar{\lambda}}{p_c} \left(e^{-r^*T} - e^{-\mu_2 T}\right) < 0. \quad (133)$$

où  $r^* - \mu_2 = \mu_1$  et nous avons utilisé l'expression (132) et la propriété suivante :  $\frac{p'_c \bar{\lambda}}{p_c} = \frac{m_p}{m_{\bar{\lambda}}}$ . Puisque nous sommes en mesure de montrer que la valeur d'équilibre de l'utilité marginale de la richesse est une fonction croissante de la durée du choc  $T$ , prend une valeur nulle pour  $T = 0$ , et converge vers  $\lambda_p$  lorsque  $T \rightarrow \infty$ , alors la variation de  $\bar{\lambda}$  après une détérioration transitoire des termes de l'échange est sans ambiguïté positive, bien que l'ampleur de son saut soit modéré par rapport à celui réalisé après un choc permanent non anticipé en raison d'un *effet richesse* plus faible associé à un *effet prix relatif* jouant en sens contraire, l'ampleur de dernier effet étant subordonné au degré de persistance des habitudes de consommation.

La variation à long terme de la consommation réelle par rapport à son niveau initial  $\tilde{c}_0$  après un choc temporaire non anticipé des termes de l'échange est donnée par :

$$\left. \frac{d\tilde{c}}{dp} \right|_{temp} = m_{\bar{\lambda}} \lambda_p \left(1 - e^{-r^* T}\right) - \frac{r^*}{\mu_1} \left(\frac{\sigma + \mu_1}{\delta + \sigma}\right) m_p \left(e^{-r^* T} - e^{-\mu_2 T}\right) > 0. \quad (134)$$

Le signe de l'expression (134) est sans ambiguïté positif puisque l'*effet richesse* (premier terme du membre de droite de (134)) l'emporte sur l'*effet prix relatif* associé à un *effet d'inertie* (second terme du membre de droite) à long terme. On peut ajouter que plus la persistance des habitudes de consommation est élevée, c. a. d. plus  $|\mu_1|$  est faible, plus le terme du membre de droite de (134) prend une valeur élevée, plus la variation à long terme de la consommation réelle est modérée après une détérioration temporaire non anticipée des termes de l'échange.

### Les effets à court terme

Il convient dans un premier temps d'écrire les expressions des constantes (en fixant  $\tau = 1$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{dp} &= -m_{\bar{\lambda}} \lambda_p \left(1 - e^{-r^* T}\right) - m_p \left[1 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\right) \left(\frac{\sigma + \mu_1}{\delta + \sigma}\right) e^{-\mu_2 T}\right] \\ &\quad + \frac{r^*}{\mu_1} \left(\frac{\sigma + \mu_1}{\delta + \sigma}\right) m_p \left(e^{-r^* T} - e^{-\mu_2 T}\right) \geq 0, \end{aligned} \quad (135a)$$

$$\frac{A_2}{dp} = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\right) \left(\frac{\sigma + \mu_1}{\delta + \sigma}\right) m_p e^{-\mu_2 T} > 0, \quad (135b)$$

$$\begin{aligned} \frac{A'_1}{dp} &= -m_{\bar{\lambda}} \lambda_p \left(1 - e^{-r^* T}\right) - m_p \left[1 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\right) \left(\frac{\sigma + \mu_1}{\delta + \sigma}\right) m_p e^{-\mu_2 T}\right] \\ &\quad + \frac{r^*}{\mu_1} \left(\frac{\sigma + \mu_1}{\delta + \sigma}\right) m_p \left(e^{-r^* T} - e^{-\mu_2 T}\right) + \left(\frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1}\right) \left(\frac{\sigma + \mu_2}{\delta + \sigma}\right) m_p e^{-\mu_1 T} \end{aligned} \quad (135c)$$

Les signes des constantes (135) peuvent être établis de la façon suivante :

- Le signe de  $A_1/dp$  est ambigu. La constante  $A_1/dp$  prend une valeur positive pour  $T = 0$  et une valeur négative pour  $T \rightarrow \infty$ :

$$\left. \frac{A_1}{dp} \right|_{T=0} = -m_p \left[1 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\right) \left(\frac{\sigma + \mu_1}{\delta + \sigma}\right)\right] > 0, \quad (136a)$$

$$\left. \frac{A_1}{dp} \right|_{T \rightarrow \infty} = -(m_{\bar{\lambda}} \lambda_p + m_p) = -\left. \frac{d\tilde{c}}{dp} \right|_{perm} < 0. \quad (136b)$$

La constante  $A_1/dp$  diminue de manière monotone avec la durée du choc : elle prend des valeurs positives pour une durée du choc relativement courte et des valeurs négatives lorsque la durée du choc devient suffisamment élevée.

- Le signe de  $A_2/dp$  est sans ambiguïté positif. Son expression est une fonction décroissante de la durée du choc  $T$ .
- La détermination du signe de  $A'_1/dp$  est un peu plus complexe. En premier lieu,  $A'_1/dp$  décroît de manière monotone à mesure que  $T$  s'élève (ou s'accroît en termes absolus). En second lieu,  $A'_1/dp$  prend une valeur nulle pour  $T = 0$  et une valeur négative pour  $T \rightarrow \infty$ :

$$\left. \frac{A'_1}{dp} \right|_{T=0} = 0, \quad (137a)$$

$$\left. \frac{A'_1}{dp} \right|_{T \rightarrow \infty} = -\infty. \quad (137b)$$

d'où l'on déduit que  $A'_1/dp$  est toujours négatif.

La réaction initiale de la consommation réelle est obtenue en évaluant la solution de la consommation réelle prévalant lors de la période 1 à la date  $t = 0$  et en différenciant par rapport à  $p$  :

$$\begin{aligned} \left. \frac{dc(0)}{dp} \right|_{temp} &= \left. \frac{d\tilde{c}_1}{dp} \right|_{temp} - \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) \left. \frac{d\tilde{c}_1}{dp} \right|_{temp} + \frac{A_2}{dp} \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma} \right), \\ &= -\frac{\mu_1}{\sigma} \left\{ \left. \frac{d\tilde{c}}{dp} \right|_{temp} + m_p \left[ 1 - \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\delta + \sigma} \right) m_p e^{-\mu_2 T} \right] \right\} \\ &= -\frac{\mu_1}{\sigma} \left\{ \left. \frac{d\tilde{c}}{dp} \right|_{perm} \left( 1 - e^{-r^* T} \right) - \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\sigma}{\sigma + r^*} m_p \left[ e^{-r^* T} - \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) e^{-\mu_2 T} \right] \right\} \quad (138a) \\ &= \left( \frac{r^* - \mu_1}{r^* + \sigma} \right) \left( \frac{\tilde{Y} - \tilde{x}}{p_c} \right) \left( 1 - e^{-r^* T} \right) \\ &\quad - \frac{\tilde{x}}{p_c} \left[ \frac{1}{\gamma + \epsilon(1 - \gamma)} \right] \frac{r^* - \mu_1}{\sigma + r^*} \left[ e^{-r^* T} - \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) e^{-\mu_2 T} \right] \geq 0, \quad (138b) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que  $r^* = \mu_1 + \mu_2$  et  $\left. \frac{A_1}{dp} = -\frac{d\tilde{c}_1}{dp} \right|_{temp} - \frac{A_2}{dp} = -\frac{d\tilde{c}}{dp} \Big|_{temp} - m_p - \frac{A_2}{dp}$  pour déterminer (138a). En substituant les expressions de la variation à long terme de la consommation réelle donnée par (92a) et de  $m_p$  donnée par (104b) dans (138a), on obtient (138b).

Les variations initiales du stock d'habitudes  $s$  et de la consommation réelle  $c$  dont données par :

$$\left. \frac{ds(0)}{dp} \right|_{temp} = \mu_1 \frac{A_1}{dp} + \mu_2 \frac{A_2}{dp} = \sigma \left. \frac{dc(0)}{dp} \right|_{temp} \geq 0 \quad (139a)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dc(0)}{dp} \right|_{temp} &= \mu_1^I \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) \frac{A_1}{dp} + \mu_2^I \left( \frac{\sigma + \mu_2}{\sigma} \right) \frac{A_2}{dp}, \\ &= \left[ (\sigma + \mu_1) \left. \frac{dc(0)}{dp} \right|_{temp} + \frac{\mu_1 \mu_2}{\sigma} \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma + r^*} \right) m_p e^{-\mu_2 T} \right] \geq 0, \quad (139b) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que  $\mu_2 \left( \frac{\sigma + \mu_2}{\sigma} \right) - \mu_1 \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) = \left( \frac{\sigma + r^*}{\sigma} \right) (\mu_2 - \mu_1)$ . D'après (139a), la direction de la variation initiale du stock d'habitudes est subordonnée à la réaction initiale de la consommation réelle dont le saut initial est donné par (138). D'après (139b), le signe de la variation initiale de la consommation réelle est ambigu. Même si l'*effet prix relatif* l'emporte sur l'*effet richness*, dans le cas où la durée du choc est brève, il est possible que la consommation suive un sentier temporel décroissant après un saut initial vers le haut. Plus la détérioration temporaire des termes de l'échange est brève et plus la vitesse d'ajustement  $\sigma$  du stock d'habitudes est peu rapide (c. a. d.  $\sigma$  prend une valeur faible), plus il est probable que la consommation diminue après avoir augmenté initialement. En revanche, si la détérioration des termes de l'échange s'étend sur une période de temps suffisamment longue, l'*effet richness* prédomine, la consommation réelle baisse initialement et suit un sentier temporel décroissant (puisque dans cette situation, on a  $\frac{A_1}{dp} < 0$ ).

### Les dynamiques transitoires

On cherche maintenant à déterminer l'allure des trajectoires empruntées par le stock d'habitudes et la consommation réelle. Plus précisément, l'objectif est d'évaluer à quelles conditions les variables s'ajustent de manière non monotone au cours de la période instable 1.

*Période 1* ( $0 \leq t < T$ )

En différentiant les solutions formelles (112a) et (112b) par rapport à l'indice temporel  $t$ , on obtient les évolutions du stock d'habitudes et de la consommation réelle au cours de la période 1 à la suite d'un choc temporaire non anticipé des termes de l'échange :

$$\dot{s}(t) = \left[ \mu_1 \frac{A_1}{dp} e^{\mu_1 t} + \mu_2 \frac{A_2}{dp} e^{\mu_2 t} \right] dp \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0, \quad (140a)$$

$$\dot{c}(t) = \left[ \mu_1 \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) \frac{A_1}{dp} e^{\mu_1 t} + \mu_2 \left( \frac{\sigma + \mu_2}{\sigma} \right) \frac{A_2}{dp} e^{\mu_2 t} \right] dp \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0. \quad (140b)$$

On note respectivement  $\hat{t}$  and  $\check{t}$  les dates auxquelles  $\dot{s}(\hat{t}) = 0$  et  $\dot{c}(\check{t}) = 0$ . En annulant (140a) et (140b), on obtient :

$$\hat{t} = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \log \left[ -\frac{\mu_2 \omega_2^2 \frac{A_2}{dp}}{\mu_1 \omega_1^2 \frac{A_1}{dp}} \right] < \check{t} = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \log \left[ -\frac{\mu_2 A_2 / dp}{\mu_1 A_1 / dp} \right] < T. \quad (141)$$

La trajectoire dans le plan  $(s, c)$  change de direction au cours de la période 1 lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

1.  $A_1 / dp > 0$  ce qui garantit que le terme entre crochets est positif puisque  $A_2 / dp > 0$  et  $\mu_1 < 0$  ;
2.  $\mu_1 \omega_1^2 \frac{A_1}{dp} + \mu_2 \omega_2^2 \frac{A_2}{dp} = \frac{d\dot{c}(0)}{dp} \Big|_{temp} < 0$  ce qui garantit que le terme entre crochets est inférieur à 1.

Ces conditions sont vérifiées lorsque l'anticipation d'un niveau d'habitudes de consommation plus important l'emporte initialement sur l'effet de l'augmentation de l'utilité marginale de

la richesse mesurée en termes du bien domestique sous l'effet de l'amélioration anticipée des termes de l'échange à la date  $T$ , c. a. d. tant que  $\dot{c}(0) > 0$ . Dans les autres situations, la trajectoire dans le plan  $(s, c)$  est monotone au cours de la période 1, c. a. d. tant que  $\dot{c}(0) < 0$ .

Nous évaluons les sentiers (140a) and (140b) prévalant à la période 1 à la date  $t = T^-$  :

$$\begin{aligned}\dot{s}(T^-) &= \left[ \mu_1 \frac{A_1}{dp} e^{\mu_1 T^-} + \mu_2 \frac{A_2}{dp} e^{\mu_2 T^-} \right] dp, \\ &= \left[ \mu_1 \frac{A_1}{dp} e^{\mu_1 T^-} + \frac{\mu_2 \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma + r^*} \right) m_p \right] dp, \end{aligned} \quad (142a)$$

$$\begin{aligned}\dot{c}(T^-) &= \left[ \mu_1 \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) \frac{A_1}{dp} e^{\mu_1 T^-} + \mu_2 \left( \frac{\sigma + \mu_2}{\sigma} \right) \frac{A_2}{dp} e^{\mu_2 T^-} \right] dp, \\ &= \left[ \mu_1 \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) \frac{A_1}{dp} e^{\mu_1 T^-} + \left( \frac{\sigma + \mu_2}{\sigma} \right) \frac{\mu_2 \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma + r^*} \right) m_p \right] dp, \end{aligned} \quad (142b)$$

où nous avons substitué l'expression de  $A_2/dp$  donnée par (135b) pour obtenir (142a) et (142b).

*Période 2 ( $t \geq T$ )*

Nous évaluons les solutions (114a) and (114b) prévalant à la période stable 2 à la date  $t = T^+$  :

$$\begin{aligned}\dot{s}(T^+) &= \mu_1 \frac{A'_1}{dp} e^{\mu_1 T^+} dp < 0, \\ &= \left[ \mu_1 \frac{A_1}{dp} e^{\mu_1 T^+} + \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \left( \frac{\sigma + \mu_2}{\sigma + r^*} \right) m_p \right] dp \neq \dot{s}(T^-) \lesseqgtr 0, \end{aligned} \quad (143a)$$

$$\begin{aligned}\dot{c}(T^+) &= \mu_1 \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) \frac{A'_1}{dp} e^{\mu_1 T^+} dp < 0, \\ &= \mu_1 \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) \left[ \frac{A_1}{dp} e^{\mu_1 T^+} + \frac{\mu_2 \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \left( \frac{\sigma + \mu_2}{\sigma + r^*} \right) m_p \right] dp \neq \dot{c}(T^-), \end{aligned} \quad (143b)$$

où nous avons substitué l'expression de la constante  $A'_1/dp$  donnée par (135c).

## D.2 Le bloc de production

### Les variations à long terme

Il convient dans un premier temps d'écrire les constantes en fixant  $\tau = 1$  dans (130d)-(130f) :

$$\frac{B_1}{dp} = -k_p \left( 1 + \left( \frac{\chi_1}{\chi_2 - \chi_1} \right) e^{-\chi_2 T} \right) + \frac{\kappa'(1) \tilde{k}}{p_I} \frac{e^{-\chi_2 T}}{\chi_2 - \chi_1} p'_I \lesseqgtr 0, \quad (144a)$$

$$\frac{B_2}{dp} = \left( \frac{\chi_1}{\chi_2 - \chi_1} \right) e^{-\chi_2 T} k_p - \frac{\kappa'(1) \tilde{k}}{p_I} \frac{1}{\chi_2 - \chi_1} e^{-\chi_2 T} p'_I < 0, \quad (144b)$$

$$\frac{B'_1}{dp} = \frac{B_1}{dp} + \left( \frac{\chi_2}{\chi_2 - \chi_1} \right) e^{-\chi_1 T} k_p - \frac{\kappa'(1) \tilde{k}}{p_I} \frac{1}{\chi_2 - \chi_1} e^{-\chi_1 T} p'_I \lesseqgtr 0. \quad (144c)$$

$$(144d)$$

A long terme, le stock de capital physique s'établit de nouveau à sa valeur initiale et sa variation à long terme est donc nulle :

$$\left. \frac{d\tilde{k}_1}{dp} \right|_{temp} = \left. \frac{d\tilde{k}}{dp} \right|_{perm} = k_p > 0, \quad \left. \frac{d\tilde{k}_2}{dp} \right|_{temp} = -k_p < 0, \quad \left. \frac{d\tilde{k}}{dp} \right|_{temp} = 0. \quad (145)$$

### Les effets à court terme

On détermine l'écart entre la valeur du prix de marché du capital après le choc temporaire,  $q(0)$ , et sa valeur prévalant à l'état-stationnaire de la période 1,  $\tilde{q}_1 = p_I(p_1)$ . En évaluant (112d) à la date  $t = 0$ , et en utilisant le fait que  $B_1 = -B_2 - k_p dp$ , on obtient :

$$\begin{aligned} q(0) - \tilde{q}_1 &= - \left( \frac{p_I \chi_1}{\kappa' \tilde{k}} \right) (1 - e^{-\chi_2 T}) k_p dp - p'_I e^{-\chi_2 T} dp, \\ &= \frac{p_I}{p} \left[ \frac{r^* (1 - \alpha_I)}{\chi_2} (1 - e^{-\chi_2 T}) - \alpha_I e^{-\chi_2 T} \right] dp. \end{aligned} \quad (146)$$

La seconde expression de (146) est obtenue en substituant

$$-k_p \frac{p_I \chi_1}{\kappa' \tilde{k}} = \frac{r^* (1 - \alpha_I) p_I}{\chi_2 p}, \quad (147)$$

que l'on obtient en utilisant les relations suivantes :  $\chi_1 \chi_2 = \kappa' \frac{\tilde{k}}{p_I} p F_{kk}$ ,  $r^* p_I = p F_k$ , et  $k_p = -\frac{F_k(1-\alpha_I)}{p F_{kk}}$ .

En différenciant la solution formelle de  $k(t)$  prévalant à la période instable 1 donnée par (112c) par rapport à l'indice temporel  $t$ , en évaluant à la date  $t = 0$ , et en différenciant par rapport à  $p$ , on obtient la réaction initiale de l'investissement après un choc transitoire non anticipé des termes de l'échange :

$$\left. \frac{dI(0)}{dp} \right|_{temp} = \frac{\kappa' (1) \tilde{k}}{p} \left[ \frac{r^* (1 - \alpha_I)}{\chi_2} (1 - e^{-\chi_2 T}) - \alpha_I e^{-\chi_2 T} \right], \quad (148a)$$

$$= (1 - e^{-\chi_2 T}) \left. \frac{dI(0)}{dp} \right|_{perm} - \frac{\kappa' (1) \tilde{k}}{p} e^{-\chi_2 T} \alpha_I, \quad (148b)$$

On note la durée du choc  $\hat{T}$  telle que les effets jouant en sens opposé sur l'investissement se compensent mutuellement :

$$\hat{T} = -\frac{1}{\chi_2} \log \left[ \frac{r^* (1 - \alpha_I) / \chi_2}{\alpha_I + r^* (1 - \alpha_I) / \chi_2} \right]. \quad (149)$$

Après avoir opéré son saut initial, le prix de marché du capital évolue de la façon suivante :

$$\left. \frac{dq(0)}{dp} \right|_{temp} = -\chi_1 \left( \frac{p_I \chi_1}{\kappa' (1) \tilde{k}} \right) \left( 1 - \frac{r^*}{\chi_1} e^{-\chi_2 T} \right) k_p - r^* p'_I e^{-\chi_2 T}, \quad (150a)$$

$$= (1 - e^{-\chi_2 T}) \left. \frac{dq(0)}{dp} \right|_{perm} - \frac{r^* p_I}{p} e^{-\chi_2 T} < 0. \quad (150b)$$

### Les dynamiques transitoires

En différenciant les solutions formelles (112c) et (112d) par rapport à l'indice temporel  $t$ , on obtient les évolutions du stock de capital physique et de son prix implicite au cours de la période 1 à la suite d'un choc temporaire non anticipé des termes de l'échange :

$$\dot{k}(t) = \left[ \chi_1 \frac{B_1}{dp} e^{\chi_1 t} + \mu_2 \frac{B_2}{dp} e^{\chi_2 t} \right] dp \leq 0, \quad (151a)$$

$$\dot{q}(t) = \left[ \mu_1 \varpi_2 \frac{B_1}{dp} e^{\chi_1 t} + \mu_2 \varpi_2 \frac{B_2}{dp} e^{\chi_2 t} \right] dp > 0. \quad (151b)$$



où l'on considère le cas d'un choc transitoire, c. a. d.  $dp < 0$ . On note respectivement  $\hat{t}$  la date à laquelle  $\dot{k}(\hat{t}) = 0$ . En annulant (153a), on obtient :

$$\hat{t} = \frac{1}{\chi_1 - \chi_2} \ln \left[ -\frac{\chi_2 B_2 / dp}{\chi_1 B_1 / dp} \right] < T. \quad (152)$$

La trajectoire dans le plan  $(k, q)$  change de direction au cours de la période 1 lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

1.  $B_1 / dp < 0$  ce qui garantit que le terme entre crochets est positif puisque  $B_2 / dp < 0$ ,  $\chi_1 < 0$  et  $\chi_2 > 0$ ;
2.  $\chi_1 \frac{B_1}{dp} + \chi_2 \frac{B_2}{dp} = \frac{d\dot{i}(0)}{dp} \Big|_{temp} > 0$  ce qui garantit que le terme entre crochets est inférieur à 1.

Pour résumer, lorsque la détérioration temporaire des termes de l'échange est de courte durée, c. a. d.  $T < \hat{T}$ , le prix implicite du capital installé s'établit au-dessus de sa valeur prévalant à l'état-stationnaire 1 et l'investissement est positif jusqu'à la date  $T$ . Lorsque la diminution de  $p$  dure plus longtemps, c. a. d.  $T > \hat{T}$ , alors le prix implicite du capital installé s'établit en-dessous de sa valeur prévalant à l'état-stationnaire 1 et l'investissement est négatif jusqu'à la date  $t = \hat{t}$ . Puis sur la période  $\hat{t} < t < \hat{T}$ , l'investissement devient à nouveau positif lorsque  $q(t) > \tilde{q}_1$ .

En différentiant les solutions formelles (114c) et (114d) prévalant à la période 2 par rapport à l'indice temporel  $t$ , on obtient les évolutions du stock de capital physique et de son prix implicite au cours de la période stable à la suite d'un choc temporaire non anticipé des termes de l'échange :

$$\dot{k}(t) = \chi_1 \frac{B_1'}{dp} e^{\chi_1 t} dp \leq 0, \quad (153a)$$

$$\dot{q}(t) = \mu_1 \varpi_2^1 \frac{B_1'}{dp} e^{\chi_1 t} dp \leq 0. \quad (153b)$$

où l'on considère le cas d'un choc transitoire, c. a. d.  $dp < 0$ . Lorsque la baisse de  $p$  est de courte durée, c. a. d.  $T < \hat{T}$ , l'investissement devient négatif et le prix implicite du capital installé poursuit son augmentation.

## E Solutions formelles du taux de préférence pour le présent

### E.1 Solution stable

On définit le taux de préférence pour le présent, noté  $\rho$ , comme l'opposé de la variation logarithmique de la valeur présente de l'utilité marginale de la consommation réelle courante le long d'un sentier localement constant de la consommation (voir Epstein [1987]):

$$\rho \equiv - \frac{d \ln \{ [u_c(c, s) + \sigma \xi] \exp(-\delta t) \}}{dt} \Big|_{\dot{c}(t)=0}. \quad (154)$$

En substituant l'équation dynamique du stock d'habitudes donnée par (4), et de son prix implicite  $\dot{\xi} = (\delta + \sigma)\xi - u_s(c, s)$ , et en éliminant  $\xi$  en utilisant le fait que  $u_c(c, s) + \sigma\xi = p_c\lambda$ , le taux de préférence pour le présent s'écrit de la façon suivante :

$$\rho(t) = \delta + \frac{1}{p_c\lambda} [\sigma u_2 - u_{cs}\sigma(c - s) + (\delta + \sigma)(u_1 - p_c\lambda)]. \quad (155)$$

En se remémorant qu'à long terme  $\tilde{\rho} = \delta$ , en linéarisant l'équation (56), en utilisant la forme particulière ARRC de la fonction d'utilité instantanée (5) et en substituant les solutions stables du stock d'habitudes et de la consommation réelle, on obtient l'expression de la solution stable du taux de préférence pour le présent :

$$\rho(t) = \delta - \frac{\delta + \sigma}{\delta + \sigma(1 - \gamma)} \frac{\gamma}{\tilde{c}} \left[ \frac{\sigma\epsilon - (1 - \epsilon)[\delta + \sigma(1 - \gamma)]}{\delta + \sigma - \mu_1} \right] \mu_1 (s(t) - \tilde{s}). \quad (156)$$

## E.2 Effet à court terme d'un choc permanent non anticipé des termes de l'échange

Nous déterminons la réaction initiale du taux de préférence pour le présent après une variation permanente des termes de l'échange en évaluant la solution stable (156) en  $t = 0$  puis en différenciant par rapport à  $p$  :

$$\left. \frac{d\rho(0)}{dp} \right|_{perm} = - \left[ \frac{\delta + \sigma}{\delta + \sigma(1 - \gamma)} \right] \frac{\gamma}{\tilde{c}} \left[ \frac{(1 - \epsilon)[\delta + \sigma(1 - \gamma)] - \sigma\epsilon}{\delta + \sigma - \mu_1} \right] \mu_1 \left. \frac{d\tilde{s}}{dp} \right|_{perm} < 0. \quad (157)$$

## E.3 Dynamique transitoire après un choc temporaire non anticipé des termes de l'échange

Dans cette section, nous étudions la dynamique transitoire du taux de préférence pour le présent après un choc temporaire non anticipé des termes de l'échange. La deuxième ligne des Figures 2 montrent les ajustements transitoires du taux de préférence pour le présent  $\rho$  obtenus de manière numérique après une détérioration temporaire des TDE d'une durée  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  respectivement.

*Période 1* ( $0 \leq t < T$ )

La solution formelle du taux de préférence pour le présent au cours de la période 1 dite instable est obtenue en linéarisant (156) au voisinage de l'état-stationnaire :

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \delta + \frac{(\delta + \sigma) u_{cc}}{p_c\bar{\lambda}} (c(t) - \tilde{c}_1) + \frac{(\delta + 2\sigma)}{p_c\bar{\lambda}} \left[ u_{cs} + \frac{\sigma}{\delta + 2\sigma} u_{ss} \right] (s(t) - \tilde{s}_1), \\ &= \delta - \frac{(\delta + \sigma)}{[\delta + \sigma(1 - \gamma)] \tilde{c}_1} \frac{\gamma}{\tilde{c}_1} \left[ \Lambda_1 \frac{A_1}{dp} e^{\mu_1 t} dp + \Lambda_2 \frac{A_2}{dp} e^{\mu_2 t} \right] dp, \end{aligned} \quad (158)$$

avec

$$\Lambda_1 = \left[ \frac{\sigma\epsilon - (1 - \epsilon)[\delta + \sigma(1 - \gamma)]}{\delta + \sigma - \mu_1} \right] \mu_1, < 0 \quad (159a)$$

$$\Lambda_2 = \left[ \frac{\sigma\epsilon - (1 - \epsilon)[\delta + \sigma(1 - \gamma)]}{\delta + \sigma - \mu_2} \right] \mu_2 > 0. \quad (159b)$$

La réaction initiale du taux de préférence pour le présent à la suite d'un changement temporaire des termes de l'échange est obtenue en évaluant (158) à la date  $t = 0$ , et en différentiant par rapport aux termes de l'échange  $p$  :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\rho(0)}{dp} \right|_{temp} &= -\frac{(\delta + \sigma)}{[\delta + \sigma(1 - \gamma)]} \frac{\gamma}{\tilde{c}_1} \left[ \Lambda_1 \frac{A_1}{dp} + \Lambda_2 \frac{A_2}{dp} \right], \\ &= -\frac{(\delta + \sigma)^2}{[\delta + \sigma(1 - \gamma)]} \frac{\epsilon}{\tilde{c}_1} \left[ -\Lambda_1 \left. \frac{d\tilde{c}_1}{dp} \right|_{temp} + \frac{A_2}{dp} (\Lambda_2 - \Lambda_1) \right], \\ &= -\frac{(\delta + \sigma)}{[\delta + \sigma(1 - \gamma)]} \frac{\gamma}{\tilde{c}_1} \Lambda_1 \frac{\sigma}{\mu_1(\sigma + \mu_1)} \left. \frac{d\dot{c}(0)}{dp} \right|_{temp} \leq 0, \end{aligned} \quad (160)$$

où l'expression de  $\Lambda_1 < 0$  est donnée par (159a). Nous avons également évalué l'expression suivante pour obtenir (160):

$$\Lambda_2 - \Lambda_1 = \Lambda_1 \frac{(\delta + \sigma)(\mu_2 - \mu_1)}{(\delta + \sigma - \mu_2)\mu_1}. \quad (161)$$

Au cours de la période 1, le taux de préférence pour le présent évolue de la façon suivante :

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{(\delta + \sigma)}{[\delta + \sigma(1 - \gamma)]} \frac{\gamma}{\tilde{c}_1} \left[ \Lambda_1 \mu_1 \frac{A_1}{dp} e^{\mu_1 t} + \Lambda_2 \mu_2 \frac{A_2}{dp} e^{\mu_2 t} \right] dp \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0, \quad (162)$$

où nous avons différencié (158) par rapport à l'indice temporel  $t$ . On note  $\bar{t}$  la date à laquelle le taux de préférence pour le présent change de direction de long de la trajectoire, c. a. d.  $\dot{\rho}(\bar{t}) = 0$ ; l'expression de cette date est obtenue en annulant (162) :

$$\bar{t} = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \log \left[ -\frac{\Lambda_2 \mu_2 A_2 / dp}{\Lambda_1 \mu_1 A_1 / dp} \right] = \bar{t} < \bar{t} < T, \quad (163)$$

où  $A_2/dp > 0$ ,  $\Lambda_1 < 0$ ,  $\Lambda_2 > 0$ ,  $\mu_1 < 0$ , et  $\mu_2 > 0$ . On peut noter que les dates auxquelles la consommation réelle et le taux de préférence pour le présent changent de direction sont identiques. Au sommet de la courbe en cloche du sentier transitoire dans le plan  $(s, c)$ , la pente de la trajectoire est égale à zéro ce qui indique que le taux de croissance de  $c$  est nul. D'après (162), on peut déduire que cela implique un taux de variation de  $\rho$  égal à zéro.

La variation initiale du taux de préférence pour le présent est donnée par :

$$\dot{\rho}(0) = -\frac{(\delta + \sigma)}{[\delta + \sigma(1 - \gamma)]} \frac{\gamma}{\tilde{c}_1} \left[ \Lambda_1 \mu_1 \frac{A_1}{dp} + \Lambda_2 \mu_2 \frac{A_2}{dp} \right] dp \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0. \quad (164)$$

La dynamique du taux de préférence pour le présent est non monotone au cours de la période 1 si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1.  $A_1/dp < 0$  ce qui garantit que le terme entre crochets de (163) est positif;
2.  $\Lambda_1 \mu_1 \frac{A_1}{dp} + \Lambda_2 \mu_2 \frac{A_2}{dp} < 0$ , c. a. d.  $\left. \frac{d\dot{\rho}(0)}{dp} \right|_{temp} > 0$  (voir éq. (164)), ce qui implique que le terme entre crochets de (163) est inférieur à l'unité.

Alors que la consommation doit effectuer un saut vers le bas d'une ampleur indiquée par  $dc(T) = -\kappa dp < 0$ , il s'agit d'évaluer si le taux de préférence pour le présent s'ajuste de manière continue ou non au moment où les termes de l'échange reviennent à leur niveau

initial. Il faut donc évaluer le terme  $\rho(T^+) - \rho(T^-)$  en évaluant les expressions (158) et (166) aux dates  $t = T^-$  et  $t = T^+$  puis en calculant la différence entre les deux expressions :

$$\begin{aligned}\rho(T^+) - \rho(T^-) &= -\frac{(\delta + \sigma)}{[\delta + \sigma(1 - \gamma)]} \frac{\gamma}{\tilde{c}} \left\{ \Lambda_1 \left[ A_1 + A_2 e^{(\mu_2 - \mu_1)T} + m_p e^{-\mu_2 T} - A_1 \right] e^{\mu_1 T} - \Lambda_2 A_2 e^{\mu_2 T} \right\} \\ &= -\frac{(\delta + \sigma)}{[\delta + \sigma(1 - \gamma)]} \frac{\gamma}{\tilde{c}} \{ A_2 (\Lambda_2 - \Lambda_1) + \Lambda_1 m_p \} = 0,\end{aligned}\quad (165)$$

où nous supposons que les termes linéarisés aux périodes 1 et 2 sont identiques au terme linéarisé de la période initiale (c. a. d.  $\tilde{c} = \tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = \tilde{c}_0$ ) et nous avons utilisé le fait que  $A'_1 = A_1 + A_2 e^{(\mu_2 - \mu_1)T} + m_p e^{-\mu_2 T}$  pour obtenir l'expression de la première ligne. La deuxième ligne est obtenue en utilisant le fait que  $A_2 = -\frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \frac{\sigma + \mu_1}{\delta + \sigma} m_p e^{-\mu_2 T}$  et en substituant l'expression  $\Lambda_2 - \Lambda_1$  donnée par (165).

*Période 2 ( $t \geq T$ )*

La solution formelle du taux de préférence pour le présent au cours de la période stable 2 est obtenue en linéarisant (155) au voisinage de l'état-stationnaire (c. a. d.  $\tilde{s}_2, \tilde{c}_2$ ) et en utilisant le fait que  $\tilde{\rho}_2 = \delta$ ; nous obtenons :

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \delta + \frac{(\delta + \sigma) u_{cc}}{p_c \bar{\lambda}} (c(t) - \tilde{c}_2) + \frac{(\delta + 2\sigma)}{p_c \bar{\lambda}} \left[ u_{cs} + \frac{\sigma}{\delta + 2\sigma} u_{ss} \right] (s(t) - \tilde{s}_2), \\ &= \delta - \frac{(\delta + \sigma)}{[\delta + \sigma(1 - \gamma)]} \frac{\gamma}{\tilde{c}_2} \Lambda_1 \frac{A'_1}{dp} e^{\mu_1 t} dp.\end{aligned}\quad (166)$$

avec  $\Lambda_1 < 0$  dont l'expression est donnée par (159a).

En différentiant (166) par rapport à l'indice temporel  $t$ , on est en mesure d'évaluer la dynamique de  $\rho(t)$  au cours de la période stable 2 :

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{(\delta + \sigma)}{[\delta + \sigma(1 - \gamma)]} \frac{\gamma}{\tilde{c}_2} \mu_1 \Lambda_1 \frac{A'_1}{dp} e^{\mu_1 t} dp < 0.\quad (167)$$

Quelle que soit la persistance de la détérioration des termes de l'échange, les individus anticipent parfaitement que leurs habitudes de consommation seront plus faibles à long terme. Le long de l'ajustement stable, le sentier temporel décroissant du stock d'habitudes implique un sentier temporel décroissant pour le taux de préférence pour le présent puisque l'utilité marginale de la consommation diminue avec la baisse de  $s$  (car  $u_{cs} > 0$ ).

## F Solutions formelles du bien-être après des chocs des termes de l'échange

Dans cette section, on étudie les effets sur le bien-être de chocs non anticipés tant permanent que temporaire des termes de l'échange. On note  $\phi$  le bien-être instantané :

$$\phi(t) = u(c(t), s(t)).\quad (168)$$

et  $U$  sa valeur présente actualisée sur un horizon infini :

$$U = \int_0^\infty \phi(t) \exp(-\delta t) dt.\quad (169)$$

Nous réécrivons la fonction d'utilité instantanée qui est supposée prendre la forme d'une fonction à aversion relative vis-à-vis du risque constante :

$$u(c, s) = \frac{1}{1-\epsilon} \left[ \frac{c}{s^\gamma} \right]^{1-\epsilon}, \quad (170)$$

où  $\epsilon$  correspond au aversion relative vis-à-vis du risque et  $\gamma$  représente le poids que les individus attachent à la consommation relative dans leur utilité, avec  $0 \leq \gamma < 1$ .

Nous écrivons à nouveau le niveau de long terme de la consommation réelle :

$$\tilde{c}_i = \left[ \left( \frac{\delta + \sigma}{\delta + \sigma(1-\gamma)} \right) p_c(p_i) \bar{\lambda} \right]^{-\frac{1}{\gamma+\epsilon(1-\gamma)}}, \quad i = 1, 2. \quad (171)$$

En différenciant la fonction d'utilité instantanée (170) par rapport à  $c$  et  $s$  et en évaluant à l'équilibre de long-terme en utilisant la relation (171), on obtient :

$$\tilde{u}_1^i = \tilde{c}_i^{-[\gamma+\epsilon(1-\gamma)]} = \left( \frac{\delta + \sigma}{\delta + \sigma(1-\gamma)} \right) p_c(p_i) \bar{\lambda} > 0, \quad i = 1, 2, \quad (172a)$$

$$\tilde{u}_s^i = -\gamma \tilde{c}_i^{-[\gamma+\epsilon(1-\gamma)]} = -\gamma \left( \frac{\delta + \sigma}{\delta + \sigma(1-\gamma)} \right) p_c(p_i) \bar{\lambda} = -\gamma \tilde{u}_1^i < 0, \quad i = 1, 2. \quad (172b)$$

$$\tilde{u}_1^i + \tilde{u}_s^i = (1-\gamma) \tilde{u}_1^i > 0, \quad i = 1, 2, \quad (172c)$$

où  $\tilde{u}_1^i > 0$  et  $\tilde{u}_s^i < 0$ . On note  $\tilde{u}_1$  et  $\tilde{u}_s$  les dérivées partielles de la fonction d'utilité instantanée par rapport à la dépense réelle et au stock d'habitudes. On rappelle que la notation "tilde" indique les dérivées partielles de la fonction d'utilité instantanée sont évaluées à l'équilibre de long terme, c'est-à-dire  $\tilde{u}_1 = u_1(\tilde{c}, \tilde{s})$  et  $\tilde{u}_s = u_2(\tilde{c}, \tilde{s})$ . L'indice  $i$  fait référence à l'état-stationnaire avec  $i = 1, 2$ .

Et nous déterminons des expressions qui s'avèreront très utiles lors de l'évaluation des effets de court terme et de long terme :

$$\Delta_1^i \equiv \tilde{u}_c^i \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) + \tilde{u}_s^i = \left( \frac{\delta + \sigma}{\delta + \sigma(1-\gamma)} \right) p_c(p_i) \bar{\lambda} \left[ \frac{\sigma(1-\gamma) + \mu_1}{\sigma} \right] < 0, \quad i = (173a)$$

$$\Delta_2^i \equiv \tilde{u}_c^i \left( \frac{\sigma + \mu_2}{\sigma} \right) + \tilde{u}_s^i = \left( \frac{\delta + \sigma}{\delta + \sigma(1-\gamma)} \right) p_c(p_i) \bar{\lambda} \left[ \frac{\sigma(1-\gamma) + \mu_2}{\sigma} \right] > 0, \quad i = (173b)$$

où (173b) a un signe positif puisque  $\mu_2 > 0$ . Le signe négatif de (173a) résulte des inégalités suivantes :

$$\frac{\sigma(1-\gamma) + \mu_1}{\sigma} < 0 \quad \text{puisque} \quad \delta + \sigma(1-\gamma) > 0, \quad (174)$$

où la condition (174) a été déterminée en utilisant la troisième expression de la valeur propre donnée par (63).

## F.1 Solutions formelles du bien-être instantané et du bien-être global après un choc permanent non anticipé des termes de l'échange

### Bien-être instantané

On linéarise la fonction d'utilité instantanée (168) au voisinage de l'état-stationnaire :

$$\phi(t) = \tilde{\phi} + u_c(\tilde{c}, \tilde{s})(c(t) - \tilde{c}) + u_s(\tilde{c}, \tilde{s})(s(t) - \tilde{s}), \quad (175)$$

avec  $\tilde{\phi}$  donné par

$$\tilde{\phi} = u(\tilde{c}, \tilde{s}), \quad (176)$$

où  $\tilde{c} = \tilde{s}$ .

La dynamique transitoire du bien-être global peut être plus facilement appréhendée en comparant la réaction initiale de l'utilité instantanée avec sa variation à long terme :

$$\left. \frac{d\phi(0)}{dp} \right|_{perm} = -\tilde{u}_c \left( \frac{\mu_1}{\sigma} \right) \left. \frac{d\tilde{s}}{dp} \right|_{perm} > 0, \quad (177a)$$

$$\left. \frac{d\tilde{\phi}}{dp} \right|_{perm} = [\tilde{u}_c + \tilde{u}_s] \left. \frac{d\tilde{s}}{dp} \right|_{perm} > 0. \quad (177b)$$

L'équation (177a) indique que la perte initiale de bien-être est d'autant plus faible que l'inertie de la consommation à court terme est élevée, ce qui est reflétée par une valeur faible de  $|\mu_1|$ . Puisque  $\frac{\sigma(1-\gamma)+\mu_1}{\sigma} < 0$  (voir (174)),  $\phi$  se sur-ajuste par rapport à sa réaction prévalant à long terme, c. a. d.  $\phi(0) < \tilde{\phi}$ .

Le long du sentier stable,  $\phi$  diminue vers sa nouvelle valeur de long à une vitesse dictée par  $|\mu_1|$  :

$$\dot{\phi}(t) = -\mu_1 \left[ \tilde{u}_c \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) + \tilde{u}_s \right] \left. \frac{d\tilde{s}}{dp} \right|_{perm} e^{\mu_1 t} dp > 0, \quad (178)$$

où nous avons différencié (175) par rapport au temps  $t$ . Le signe de (178) a été déterminé en nous appuyant sur l'expression (173a).

Nous présentons les expressions de la réaction initiale et de la variation à long terme de  $\phi$  en utilisant la forme ARRC de la fonction d'utilité instantanée donnée par (170) :

$$\left. \frac{d\phi(0)}{dp} \right|_{perm} = - \left[ \frac{\delta + \sigma}{\delta + \sigma(1-\gamma)} \right] p_c \bar{\lambda} \frac{(\mu_1 - r^*)}{(\sigma + r^*)} \frac{(\tilde{Y} - \tilde{x})}{p_c} > 0, \quad (179a)$$

$$\left. \frac{d\tilde{\phi}}{dp} \right|_{perm} = (1-\gamma) p_c \bar{\lambda} \left[ \frac{\delta + \sigma}{\delta + \sigma(1-\gamma)} \right] \left. \frac{d\tilde{c}}{dp} \right|_{perm}, \quad (179b)$$

avec  $\left[ \frac{\delta + \sigma}{\delta + \sigma(1-\gamma)} \right] > 1$  et  $0 < - \left[ \frac{\sigma(1-\gamma)}{\mu_1} \right] < 1$  d'après (174).

On compare d'abord la variation de bien-être instantané entre la situation où l'individu est doté de préférences NST et le cas où l'individu a des préférences ST :

$$\left. \frac{d\tilde{\phi}}{dp} \right|_{perm} - \left. \frac{d\tilde{\phi}}{dp} \right|_{perm}^{\gamma=0} = -p_c \bar{\lambda} \frac{(\tilde{Y} - \tilde{x})}{p_c} \frac{r^* [\sigma(1-\gamma) + \mu_1]}{\mu_1 [\sigma(1-\gamma) + r^*]} < 0. \quad (180)$$

Nous comparons également la réaction du bien-être instantané à court terme par rapport à sa variation à long terme :

$$\left. \frac{d\phi(0)}{dp} \right|_{perm} - \left. \frac{d\tilde{\phi}}{dp} \right|_{perm} = - \left[ \frac{\sigma(1-\gamma) + \mu_1}{\sigma} \right] \left. \frac{d\tilde{s}}{dp} \right|_{perm} > 0, \quad (181)$$

où le terme entre crochets est négatif (voir éq. (174)).

Au cours du temps, l'utilité instantanée évolue de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}(t) &= -\mu_1 \left[ \tilde{u}_c \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) + \tilde{u}_s \right] \frac{d\tilde{s}}{dp} \Big|_{perm} e^{\mu_1 t} dp, \\
&= -\mu_1 \left[ \frac{\delta + \sigma}{\delta + \sigma(1 - \gamma)} \right] p_c \bar{\lambda} \left[ \frac{\sigma(1 - \gamma) + \mu_1}{\sigma} \right] \frac{d\tilde{s}}{dp} \Big|_{perm} e^{\mu_1 t} dp, \\
&= -\mu_1 \left[ \frac{\sigma(1 - \gamma) + \mu_1}{\sigma} \right] \frac{d\tilde{\phi}}{dp} \Big|_{perm} e^{\mu_1 t} dp > 0.
\end{aligned} \tag{182}$$

Une fois que l'utilité instantanée a baissé à la date  $t = 0$ ,  $\phi(t)$  s'élève sans ambiguïté vers son nouveau niveau de long terme plus faible qu'initialement.

### Bien-être global

Jusqu'à maintenant, nous avons étudié les effets d'une détérioration permanente non anticipée des termes de l'échange sur le bien-être instantané, c. a. d. à différentes dates du temps. Pour étudier de manière pertinente les effets sur le bien-être des individus dans un cadre d'optimisation intertemporelle, il convient d'évaluer la valeur actualisée de (168) sur un horizon de temps infini.

De façon à disposer d'une mesure "complète" du bien-être, il convient d'évaluer la valeur présente des flux d'utilité sur l'horizon de vie complet de l'agent représentatif :

$$U = \frac{\tilde{u}}{\delta} + \frac{[\tilde{u}_c \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) + \tilde{u}_s]}{\delta - \mu_1} (s_0 - \bar{s}). \tag{183}$$

Le premier terme du membre de droite de (185) représente la valeur capitalisée du bien-être instantané évalué à l'état-stationnaire. Le second terme du membre de droite de (185) disparaît dès lors que les préférences sont séparables dans le temps. En revanche, lorsque les individus adoptent un comportement de type formation d'habitudes, la consommation réelle s'ajuste lentement et progressivement et le bien-être au cours de l'ajustement se situe en-dessous ou au-dessus de sa valeur de long terme. Le second terme prend en compte cet écart transitoire par rapport à la cible de long terme.

De façon à déterminer la variation du bien-être global évalué à la date  $t = 0$ , nous différencions (185) par rapport à  $p$  :

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{dp} \Big|_{perm} &= \frac{(\tilde{u}_c + \tilde{u}_s)}{\delta} \frac{d\tilde{s}}{dp} \Big|_{perm} - \left( \frac{1}{\delta - \mu_1} \right) \left[ \tilde{u}_c \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) + \tilde{u}_s \right] \frac{d\tilde{s}}{dp} \Big|_{perm}, \\
&= \frac{1}{\delta} \frac{d\tilde{\phi}}{dp} \Big|_{perm} + \left( \frac{1}{\delta - \mu_1} \right) \left[ \frac{d\phi(0)}{dp} \Big|_{perm} - \frac{d\tilde{\phi}}{dp} \Big|_{perm} \right], \\
&= -\frac{\mu_1}{\delta(\delta - \mu_1)} \left[ \left( 1 + \frac{\delta}{\sigma} \right) \tilde{u}_c + \tilde{u}_s \right] \frac{d\tilde{s}}{dp} \Big|_{perm} > 0, .
\end{aligned} \tag{184}$$

L'expression de la première ligne de (186) représente la valeur actualisée à la date  $t = 0$  des flux de gains ou de pertes d'utilité sur un horizon de vie infini. D'après la troisième ligne de (186), une détérioration permanente des termes de l'échange conduit sans ambiguïté à une perte de bien-être global. La seconde ligne de (186) indique que la perte de bien-être global provient de deux éléments : la perte d'utilité instantanée à long-terme and le fait que l'utilité se situe en-dessous de son nouveau niveau de long terme au cours de l'ajustement stable.

## F.2 Solutions formelles du bien-être instantané et du bien-être global après un choc temporaire non anticipé des termes de l'échange

### Bien-être instantané

Pour déterminer les solutions formelles pour le bien-être instantané, nous linéarisons (168) au voisinage de l'état-stationnaire et nous substituons les solutions associées à la période concernée.

*Période 1* ( $0 \leq t < T$ )

Lorsque le choc transitoire des termes de l'échange est à l'oeuvre, l'économie emprunte des trajectoires instables :

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \tilde{\phi}_1 + u_c(\tilde{c}_1, \tilde{s}_1) \left[ \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) \frac{A_1}{dp} e^{\mu_1 t} + \left( \frac{\sigma + \mu_2}{\sigma} \right) \frac{A_2}{dp} e^{\mu_2 t} \right] dp \\ &+ u_s(\tilde{c}_1, \tilde{s}_1) \left[ \frac{A_1}{dp} e^{\mu_1 t} + \frac{A_2}{dp} e^{\mu_2 t} \right] dp, \end{aligned} \quad (185)$$

où  $\tilde{\phi}_1 = u(\tilde{c}_1, \tilde{s}_1)$  (avec  $\tilde{c}_1 = \tilde{s}_1$ ).

*Période 2* ( $t \geq T$ )

Une fois que les termes de l'échange reviennent à leur niveau initial, l'économie emprunte des sentiers stables :

$$\phi(t) = \tilde{\phi}_2 + \left[ u_c(\tilde{c}_2, \tilde{s}_2) \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) + u_s(\tilde{c}_2, \tilde{s}_2) \right] \frac{A'_1}{dp} e^{\mu_1 t} dp, \quad (186)$$

où  $\tilde{\phi}_2 = u(\tilde{c}_2, \tilde{s}_2)$  (avec  $\tilde{c}_2 = \tilde{s}_2$ ). A partir de maintenant, de façon à simplifier les notations et à rendre l'exposé plus clair, nous notons  $\tilde{u}_k^i$  la dérivée partielle de la fonction d'utilité instantanée par rapport au  $k$ -ième argument, la dérivée étant évaluée à l'état-stationnaire  $i = 1, 2$ .

La variation à long terme du bien-être instantané s'écrit de la façon suivante :

$$\left. \frac{d\tilde{\phi}}{dp} \right|_{temp} = (\tilde{u}_c^0 + \tilde{u}_s^0) \left. \frac{d\tilde{c}}{dp} \right|_{temp} > 0 \quad (187)$$

où  $\tilde{u}_c^0 + \tilde{u}_s^0 = (1 - \gamma) \tilde{u}_c^0 > 0$ . On peut remarquer que le signe de (187) repose sur la variation à long terme de la consommation réelle, cette dernière étant exclusivement engendrée par le changement de la valeur d'équilibre de l'utilité marginale de la richesse. Puisque nous avons indiqué précédemment que  $\bar{\lambda}$  effectuait un saut vers le haut et que la consommation réelle baissait à long terme, l'utilité instantanée diminue sans ambiguïté à long terme après une détérioration temporaire non anticipée des termes de l'échange, quelle que soit sa durée.

Pour évaluer l'impact initial d'une détérioration temporaire non anticipée des termes de l'échange, nous évaluons l'expression (185) à la date  $t = 0$ , et différencions par rapport à  $p$



:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d\phi(0)}{dp} \right|_{temp} &= (\tilde{u}_c + \tilde{u}_s) \left. \frac{d\tilde{c}_1}{dp} \right|_{temp} + \frac{A_1}{dp} \left[ \tilde{u}_c \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\sigma} \right) + \tilde{u}_s \right] + \frac{A_2}{dp} \left[ \tilde{u}_c \left( \frac{\sigma + \mu_2}{\sigma} \right) + \tilde{u}_s \right], \\
&= \left( \frac{\delta + \sigma}{\delta + \sigma(1 - \gamma)} \right) p_c \bar{\lambda} \left\{ (1 - \gamma) \left. \frac{d\tilde{c}_1}{dp} \right|_{temp} + \frac{A_1}{dp} \left[ \frac{\sigma(1 - \gamma) + \mu_1}{\sigma} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{A_2}{dp} \left[ \frac{\sigma(1 - \gamma) + \mu_2}{\sigma} \right] \right\} \geq 0, \tag{188}
\end{aligned}$$

où  $A_1/dp \leq 0$  et  $A_2/dp > 0$ . Pour obtenir l'équation (188), nous avons considéré que  $(\tilde{u}_c^1 + \tilde{u}_s^1) \simeq (\tilde{u}_c^0 + \tilde{u}_s^0)$  et simplifié les notations en enlevant la notation en indice  $i = 1$ , c. a. d.  $(\tilde{u}_c + \tilde{u}_s) = p_c \bar{\lambda}$ . Nous conserverons cette hypothèse de façon à pouvoir obtenir une expression analytique sous une forme plus aisément interprétable.

Au cours de la période 1, l'utilité instantanée évolue de la façon suivante :

$$\dot{\phi}(t) = \mu_1 \Delta_1 \frac{A_1}{dp} e^{\mu_1 t} dp + \mu_2 \Delta_2 \frac{A_2}{dp} e^{\mu_2 t} dp \leq 0, \tag{189}$$

où les expressions de  $\Delta_1 < 0$  et  $\Delta_2 > 0$  sont données par (173a) et (173b), respectivement; par ailleurs, nous rappelons que  $A_1/dp \leq 0$  et  $A_2/dp > 0$ .

Au cours de la période 2, l'utilité instantanée évolue de la façon suivante :

$$\dot{\phi}(t) = \mu_1 \Delta_1 \frac{A_1'}{dp} e^{\mu_1 t} dp, \tag{190}$$

où  $\dot{\phi}(t) > 0$  après une détérioration temporaire non anticipée des termes de l'échange puisque  $\Delta_1 < 0$  et  $A_1'/dp < 0$ , quelle que soit la durée de la baisse du prix relatif domestique.

En utilisant la forme particulière (ARRC) de la fonction d'utilité instantanée donnée par (5), nous pouvons donner une expression de la réaction initiale de  $\phi$  s'écrivant de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d\phi(0)}{dp} \right|_{temp} &= \left( \frac{\delta + \sigma}{\delta + \sigma(1 - \gamma)} \right) p_c \bar{\lambda} \left\{ (1 - \gamma) \left. \frac{d\tilde{c}_1}{dp} \right|_{temp} - \left[ \frac{\sigma(1 - \gamma) + \mu_1}{\sigma} \right] \left. \frac{d\tilde{c}_1}{dp} \right|_{temp} \right. \\
&\quad \left. + \frac{A_2}{dp} \left[ \frac{\sigma(1 - \gamma) + \mu_2}{\sigma} - \frac{\sigma(1 - \gamma) + \mu_1}{\sigma} \right] \right\}, \\
&= -\frac{\mu_1}{\sigma} \left( \frac{\delta + \sigma}{\delta + \sigma(1 - \gamma)} \right) p_c \bar{\lambda} \left\{ \left. \frac{d\tilde{c}}{dp} \right|_{temp} + m_p \left[ 1 - \left( \frac{\sigma + \mu_1}{\delta + \sigma} \right) m_p e^{-\mu_2 T} \right] \right\}, \\
&= \left[ \frac{\delta + \sigma}{\delta + \sigma(1 - \gamma)} \right] p_c \bar{\lambda} \left. \frac{dc(0)}{dp} \right|_{temp} \geq 0. \tag{191}
\end{aligned}$$

L'expression (191) du changement initial du bien-être instantané est intéressante car elle montre que sa réaction est exclusivement subordonnée à la variation initiale de la consommation réelle faisant suite au choc temporaire non anticipé des termes de l'échange.

### Bien-être global

Pour évaluer l'effet d'une baisse transitoire du prix relatif du bien domestique sur le bien-être global, nous avons estimé la valeur actualisée des flux d'utilité au cours des deux périodes de temps  $(0, T)$  et  $(T, \infty)$ .

$$U(t) = \int_0^T \phi(t) e^{-\delta t} dt + \int_T^\infty \phi(t) e^{-\delta t} dt. \tag{192}$$

Après avoir substitué les solutions générales de  $c(t)$  et  $s(t)$ , nous obtenons une mesure du bien-être global :

$$\begin{aligned}
U &= \tilde{\phi}_1 \frac{(1 - e^{-r^*T})}{r^*} + \Delta_1^1 \frac{A_1 (1 - e^{-(r^* - \mu_1)T})}{dp (r^* - \mu_1)} dp + \Delta_2^1 \frac{A_2 (1 - e^{-(r^* - \mu_2)T})}{dp (r^* - \mu_2)} dp \\
&+ \tilde{\phi}_2 \frac{e^{-r^*T}}{r^*} + \Delta_1^2 \frac{A_1' e^{-(r^* - \mu_1)T}}{dp (r^* - \mu_1)} dp,
\end{aligned} \tag{193}$$

avec

$$\Delta_1^1 = \left( \frac{\delta + \sigma}{\delta + \sigma(1 - \gamma)} \right) p_c(p_1) \bar{\lambda} \left[ \frac{\sigma(1 - \gamma) + \mu_1}{\sigma} \right] < 0, \tag{194a}$$

$$\Delta_2^1 = \left( \frac{\delta + \sigma}{\delta + \sigma(1 - \gamma)} \right) p_c(p_1) \bar{\lambda} \left[ \frac{\sigma(1 - \gamma) + \mu_2}{\sigma} \right] > 0, \tag{194b}$$

$$\Delta_1^2 = \left( \frac{\delta + \sigma}{\delta + \sigma(1 - \gamma)} \right) p_c(p_2) \bar{\lambda} \left[ \frac{\sigma(1 - \gamma) + \mu_1}{\sigma} \right] < 0, \tag{194c}$$

où  $p_2 = p_0$  et en gardant à l'esprit que  $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}$  puisque l'utilité marginale de la richesse effectue un saut unique en  $t = 0^+$  de façon à satisfaire l'unique condition de solvabilité intertemporelle puis reste constante au cours du temps.

## G Formes fonctionnelles et analyse numérique

Pour l'analyse numérique, nous supposons que le capital physique se déprécie au taux  $\delta_K > 0$ . Nous indiquons ci-dessous les principales modifications à apporter aux expressions.

La dérivée partielle de la fonction du stock d'actifs étrangers s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned}
v_p \equiv \frac{\partial \tilde{b}_i}{\partial p_i} &= - \frac{\left[ F_k (1 - \alpha_I) p_I \left( r^* - \frac{\psi}{2} (\delta_K)^2 \right) - p_i F_{kk} \left( \tilde{Y}_i - \tilde{x}_i - \tilde{J}_{x,i} \right) \right] \left[ u_{cc} + \frac{\delta + 2\sigma}{\delta + \sigma} \tilde{\Gamma} \right]}{G} - \frac{p_i F_{kk} p_c' p_c \bar{\lambda}_i}{G} \\
&= - \frac{p_I}{r^*} \left( r^* - \frac{\psi}{2} (\delta_K)^2 \right) k_p + \frac{p_c}{r^*} m_p - \frac{\left( \tilde{Y}_i - \tilde{x}_i \right)}{r^*} < 0,
\end{aligned} \tag{195}$$

Le système d'équations prévalant à l'équilibre de long terme devient :

$$\tilde{c} = \left[ \left( \frac{\delta + \sigma}{\delta + \sigma(1 - \gamma)} \right) p_c(p) \bar{\lambda} \right]^{-\frac{1}{\gamma + \epsilon(1 - \gamma)}}, \tag{196a}$$

$$\tilde{c} = \tilde{s}, \tag{196b}$$

$$\tilde{q} = p_I(p), \tag{196c}$$

$$(r^* + \delta_K) \tilde{q} = p F_k(\tilde{k}, 1), \tag{196d}$$

$$r^* \tilde{b} + p F(\tilde{k}, 1) - p_c(p) \tilde{c} - p_I(p) \tilde{J} - g = 0, \tag{196e}$$

et la condition de solvabilité intertemporelle

$$(b_0 - \tilde{b}) = -p_I(k_0 - \tilde{k}) - \frac{p_c(\sigma + \mu_1)}{\sigma(\mu_1 - r^*)} (s_0 - \tilde{s}). \tag{196f}$$

avec

$$\tilde{I} = \delta_K \tilde{k}, \tag{197a}$$

$$\tilde{J} = \tilde{I} \left[ 1 + \frac{\psi}{2} \frac{\tilde{I}}{\tilde{k}} \right] = \delta_K \tilde{k} \left[ 1 + \frac{\psi}{2} \delta_K \right]. \tag{197b}$$

En différentiant de manière totale le système d'équations (196), on obtient sous forme matricielle :

$$= \begin{pmatrix} u_{cc} + \frac{\delta+2\sigma}{\delta+\sigma} \tilde{\Gamma} & -p_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{p} F_{kk} & 0 \\ -p_c & 0 & p_I \left( r^* - \frac{\psi}{2} (\delta_K)^2 \right) & r^* \\ \Upsilon_s^1 & 0 & p_I & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tilde{c} \\ d\bar{\lambda} \\ d\tilde{k} \\ d\tilde{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_c \bar{\lambda} dp \\ 0 \\ -F_k (1 - \alpha_I) d\bar{p} \\ -(\tilde{Y} - \tilde{x} - \tilde{J}_x) dp \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (198)$$

où nous avons utilisé le fait que  $pF_k - p_I \delta_K \left( 1 + \frac{\psi}{2} \delta_K \right) = p_I \left( r^* - \frac{\psi}{2} (\delta_K)^2 \right)$ .

Les variations à long terme des variables macroéconomiques après un choc permanent non anticipé des termes de l'échange s'écrivent de la façon suivante :

$$\frac{d\tilde{c}}{dp} \Big|_{perm} = \frac{d\tilde{s}}{dp} \Big|_{perm} = \frac{\sigma}{\mu_1} \left( \frac{\mu_1 - r^*}{\sigma + r^*} \right) \left\{ \frac{(\tilde{Y} - \tilde{x} - \tilde{J}_x)}{p_c} - \frac{p_I}{p_c} \frac{d\tilde{k}}{dp} \Big|_{perm} \frac{\psi}{2} (\delta_K)^2 \right\} \asymp (199a)$$

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dp} \Big|_{perm} = -\frac{\bar{\lambda}}{p} \left\{ \frac{\sigma (\mu_1 - r^*) p (\tilde{Y} - \tilde{x} - \tilde{J}_x)}{\mu_1 (\sigma + r^*) p_c \tilde{c}} [\gamma + \epsilon (1 - \gamma)] + \alpha_c \right\} < 0, \quad (199b)$$

$$\frac{d\tilde{k}}{dp} \Big|_{perm} = -\frac{F_k (1 - \alpha_I)}{p F_{kk}} > 0, \quad (199c)$$

$$\frac{d\tilde{q}}{dp} \Big|_{perm} = p'_I > 0, \quad (199d)$$

$$\frac{d\tilde{b}}{dp} \Big|_{perm} = -p_I \frac{d\tilde{k}}{dp} \Big|_{perm} - \Upsilon_s^1 \frac{d\tilde{s}}{dp} \Big|_{perm} > 0. \quad (199e)$$

### L'allocation intratemporelle des dépenses de consommation

Nous supposons que le bien domestique et le bien étranger sont agrégés au moyen d'une fonction à élasticité de substitution constante:

$$c(x, z) = \left[ \varphi_c^{\frac{1}{\phi_c}} z^{\frac{\phi_c-1}{\phi_c}} + (1 - \varphi_c)^{\frac{1}{\phi_c}} x^{\frac{\phi_c-1}{\phi_c}} \right]^{\frac{\phi_c}{\phi_c-1}} \quad (200)$$

avec  $\phi_c > 0$  the l'élasticité de substitution intratemporelle entre la consommation du bien domestique  $x$  et du bien importé  $z$ , étant donné la dépense totale mesurée en termes du bien étranger:

$$E_c \equiv px + z. \quad (201)$$

Dans une première étape, le ménage représentatif minimise le coût de la dépense totale de consommation,  $E_c(t) = p(t)x(t) + z(t)$ , pour un niveau donné de sous-utilité,  $c(t)$ , avec  $p(t)$  le prix relatif du bien domestique, c'est-à-dire les termes de l'échange. Pour un niveau

choisi de consommation réelle  $c(t)$ , le panier de biens optimal  $(x(t), z(t))$  est une solution de

$$p_c(p(t))c(t) = \min_{\{x(t), z(t)\}} \{p(t)x(t) + z(t) : c(x(t), z(t)) \geq c(t)\}. \quad (202)$$

La fonction de sous-utilité  $c(\cdot)$  étant homogène de degré égal à l'unité, la dépense totale en biens de consommation  $E_c(t)$  peut être exprimée comme le produit entre l'indice de prix à la consommation et la consommation en volume, c. a. d.  $E_c \equiv p_c(p(t))c(t)$ , avec  $p_c(p(t))$  la fonction de coût unitaire duale associée à la consommation en volume. La fonction de coût unitaire duale,  $p_c(\cdot)$ , est définie comme la dépense minimum en biens de consommation,  $E_c$ , de telle manière que  $c = c(x(t), z(t)) = 1$ , pour un niveau donné des termes de l'échange,  $p$ . Son expression est donnée par :

$$p_c = \left[ \varphi_c + (1 - \varphi_c) p^{1-\phi_c} \right]^{\frac{1}{1-\phi_c}}. \quad (203)$$

La fonction de coût unitaire duale dépend des termes de l'échange et est exprimée en termes du bien importé. Elle possède les propriétés suivantes :

$$p'_c = (1 - \varphi_c) p^{-\phi_c} \left[ \varphi_c + (1 - \varphi_c) p^{1-\phi_c} \right]^{\frac{\phi_c}{1-\phi_c}} > 0, \quad (204a)$$

$$\begin{aligned} p''_c &= \phi_c (1 - \varphi_c) p^{-(1+\phi_c)} \left[ \varphi_c + (1 - \varphi_c) p^{1-\phi_c} \right]^{\frac{\phi_c}{1-\phi_c}} \left[ \frac{(1 - \varphi_c) p^{1-\phi_c}}{\varphi_c + (1 - \varphi_c) p^{1-\phi_c}} - 1 \right] < 0 \\ &= \phi_c p'_c p^{-1} \left[ \frac{(1 - \varphi_c) p^{1-\phi_c}}{\varphi_c + (1 - \varphi_c) p^{1-\phi_c}} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (204b)$$

Le choix du ménage représentatif relatif à la répartition (intra-temporelle) de la dépense totale entre le bien domestique et le bien importé résulte du Lemme de Shephard (ou théorème de l'enveloppe) appliqué à (202):

$$x = p'_c(p)c = \frac{\alpha_c p_c c}{p}, \quad (205a)$$

$$z = [p_c(p) - p p'_c(p)]c = (1 - \alpha_c) p_c c, \quad (205b)$$

avec les parts du bien domestique et étranger dans la dépense totale de consommation qui sont données respectivement par :

$$\alpha_c = \frac{(1 - \varphi_c) p^{1-\phi_c}}{\varphi_c + (1 - \varphi_c) p^{1-\phi_c}}, \quad (206a)$$

$$1 - \alpha_c = \frac{\varphi_c}{\varphi_c + (1 - \varphi_c) p^{1-\phi_c}}. \quad (206b)$$

### Le bloc de production

Nous supposons que la fonction de production prend une forme Cobb-Douglas :

$$Y = F(k, 1) = k^{\alpha_K}, \quad (207)$$

où  $\alpha_K$  représente la part distributive du capital dans la valeur ajoutée.

Les expressions des première et seconde dérivées partielles de la fonction de production par rapport au capital physique sont données par :

$$F_k = \alpha_K k^{\alpha_K - 1} = \alpha_K \frac{Y}{k} > 0, \quad F_{kk} = \alpha_K (\alpha_K - 1) k^{\alpha_K - 2} = - (1 - \alpha_K) \frac{F_k}{k} < 0.$$

## La fonction de coût d'installation du capital physique

Nous supposons que la fonction de coût d'installation du capital physique s'écrit sous la forme suivante :

$$J = I + \frac{\psi I^2}{2K}, \quad (208)$$

où  $\psi > 0$  mesure la pente de la fonction de coût marginal d'installation. En adoptant cette forme particulière de la fonction de coût d'installation, on déduit la règle d'investissement optimal :

$$\frac{I}{k} = \frac{1}{\psi} \left( \frac{q}{pI} - 1 \right), \quad \text{avec} \quad \kappa' = \frac{1}{\psi}. \quad (209)$$

## L'allocation intratemporelle des dépenses d'investissement

Nous supposons que le bien domestique et le bien étranger sont agrégés au moyen d'une fonction à élasticité de substitution constante:

$$J(J_x, J_z) = \left[ \varphi_I^{\frac{1}{\phi_I}} J_z^{\frac{\phi_I-1}{\phi_I}} + (1 - \varphi_I)^{\frac{1}{\phi_I}} J_x^{\frac{\phi_I-1}{\phi_I}} \right]^{\frac{\phi_I}{\phi_I-1}}, \quad (210)$$

avec  $\phi_I > 0$  the l'élasticité de substitution intratemporelle entre la consommation du bien domestique  $J_x$  et du bien importé  $J_z$ , étant donné la dépense totale mesurée en termes du bien étranger :

$$E_I \equiv pJ_x + J_z. \quad (211)$$

Dans une première étape, la firme représentative minimise le coût de la dépense totale de consommation,  $E_I(t) = p(t)J_x(t) + J_z(t)$ , pour un niveau donné de sous-utilité,  $J(t)$ , avec  $p(t)$  le prix relatif du bien domestique, c'est-à-dire les termes de l'échange. Pour un niveau choisi de consommation réelle  $J(t)$ , le panier de biens optimal  $(J_x(t), J_z(t))$  est une solution de

$$p_I(p(t)) J(t) = \min_{\{J_x(t), J_z(t)\}} \{p(t)J_x(t) + J_z(t) : J(J_x(t), J_z(t)) \geq J(t)\}. \quad (212)$$

La fonction d'agrégation  $J(\cdot)$  étant homogène de degré égal à l'unité, la dépense totale en biens de consommation  $E_I(t)$  peut être exprimée comme le produit entre l'indice de prix à l'investissement et l'investissement en volume, c. a. d.  $E_I \equiv p_I(p(t)) J(t)$ , avec  $p_I(p(t))$  la fonction de coût unitaire duale associée à l'investissement en volume. La fonction de coût unitaire duale,  $p_I(\cdot)$ , est définie comme la dépense minimum en biens d'investissement,  $E_I$ , de telle manière que  $J = J(J_x(t), J_z(t)) = 1$ , pour un niveau donné des termes de l'échange,  $p$ . Son expression est donnée par :

$$p_I = \left[ \varphi_I + (1 - \varphi_I) p^{1-\phi_I} \right]^{\frac{1}{1-\phi_I}}. \quad (213)$$

La fonction de coût unitaire duale dépend des termes de l'échange et est exprimée en termes

du bien importé. Elle possède les propriétés suivantes :

$$p'_I = (1 - \varphi_I) p^{-\phi_I} \left[ \varphi_I + (1 - \varphi_I) p^{1-\phi_I} \right]^{\frac{\phi_I}{1-\phi_I}} > 0, \quad (214a)$$

$$\begin{aligned} p''_I &= \phi_I (1 - \varphi_I) p^{-(1+\phi_I)} \left[ \varphi_I + (1 - \varphi_I) p^{1-\phi_I} \right]^{\frac{\phi_I}{1-\phi_I}} \left[ \frac{(1 - \varphi_I) p^{1-\phi_I}}{\varphi_I + (1 - \varphi_I) p^{1-\phi_I}} - 1 \right] \\ &= \phi_I p'_I p^{-1} \left[ \frac{(1 - \varphi_I) p^{1-\phi_I}}{\varphi_I + (1 - \varphi_I) p^{1-\phi_I}} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (214b)$$

Le choix du ménage représentatif relatif à la répartition (intra-temporelle) de la dépense totale entre le bien domestique et le bien importé résulte du Lemme de Shephard (ou théorème de l'enveloppe) appliqué à (212) :

$$J_x = p'_I J = \frac{\alpha_I p_I J}{p}, \quad (215a)$$

$$J_z = [p_I - p p'_c] J = (1 - \alpha_I) p_I J, \quad (215b)$$

avec les parts du bien domestique et étranger dans la dépense totale de consommation qui sont données respectivement par :

$$\alpha_I = \frac{(1 - \varphi_I) p^{1-\phi}}{\varphi_I + (1 - \varphi_I) p^{1-\phi_I}}, \quad (216a)$$

$$1 - \alpha_I = \frac{\varphi_I}{\varphi_I + (1 - \varphi_I) p^{1-\phi_I}}. \quad (216b)$$

### L'équilibre de long terme

Nous écrivons les systèmes d'équations permettant d'évaluer les valeurs des variables économiques prévalant à l'état-stationnaire initial, à l'état-stationnaire 1 et à l'état-stationnaire

2 final :

$$\tilde{c}_0 = \left[ \left( \frac{\delta + \sigma}{\delta + \sigma(1 - \gamma)} \right) p_c(p_0) \lambda_0 \right]^{-\frac{1}{\gamma + \epsilon(1 - \gamma)}}, \quad (217a)$$

$$\tilde{c}_0 = \tilde{s}_0, \quad (217b)$$

$$\tilde{k}_0 = \left( \frac{\alpha_K}{r^* + \delta_K} \frac{p_0}{p_I(p_0)} \right)^{\frac{1}{1 - \alpha_K}}, \quad \text{et} \quad \tilde{J}_0 = \delta_K \tilde{k}_0 \left[ 1 + \frac{\psi}{2} \delta_K \right], \quad (217c)$$

$$\tilde{b}_0 = - \frac{[p_0 \tilde{Y}_0 - p_c(p_0) \tilde{c}] - p_I(p_0) \tilde{J}}{r^*}, \quad (217d)$$

$$\tilde{b}_0 + p_I \tilde{k} + \Upsilon_s^1 \tilde{s}_0 = b_0 + p_I k_0 + \Upsilon_s^1 s_0, \quad (217e)$$

$$\tilde{c}_1 = \left[ \left( \frac{\delta + \sigma}{\delta + \sigma(1 - \gamma)} \right) p_c(p_1) \bar{\lambda} \right]^{-\frac{1}{\gamma + \epsilon(1 - \gamma)}}, \quad (217f)$$

$$\tilde{c}_1 = \tilde{s}_1, \quad (217g)$$

$$\tilde{k}_1 = \left( \frac{\alpha_K}{r^* + \delta_K} \frac{p_1}{p_I(p_1)} \right)^{\frac{1}{1 - \alpha_K}}, \quad \text{et} \quad \tilde{J}_1 = \delta_K \tilde{k}_1 \left[ 1 + \frac{\psi}{2} \delta_K \right], \quad (217h)$$

$$\tilde{b}_1 = - \frac{[p_1 \tilde{Y}_1 - p_c(p_1) \tilde{c}_1 - p_I(p_1) \tilde{J}_1]}{r^*}, \quad (217i)$$

$$\tilde{c}_2 = \left[ \left( \frac{\delta + \sigma}{\delta + \sigma(1 - \gamma)} \right) p_c(p_2) \bar{\lambda} \right]^{-\frac{1}{\gamma + \epsilon(1 - \gamma)}}, \quad (217j)$$

$$\tilde{c}_2 = \tilde{s}_2, \quad (217k)$$

$$\tilde{k}_2 = \left( \frac{\alpha_K}{r^* + \delta_K} \frac{p_2}{p_I(p_2)} \right)^{\frac{1}{1 - \alpha_K}}, \quad \text{et} \quad \tilde{J}_2 = \delta_K \tilde{k}_2 \left[ 1 + \frac{\psi}{2} \delta_K \right], \quad (217l)$$

$$\tilde{b}_2 = - \frac{[p_2 \tilde{Y}_2 - p_c(p_2) \tilde{c}_2 - p_I(p_2) \tilde{J}_2]}{r^*}, \quad (217m)$$

avec l'unique condition de solvabilité intertemporelle

$$b_T - \tilde{b}_2 = -p_I (k_T - \tilde{k}_2) - \Upsilon_s^1 (s_T - \tilde{s}_2), \quad (217n)$$

et les nouvelles conditions initiales

$$s_T = \tilde{s}_1 + A_1 e^{\mu_1 T} + A_2 e^{\mu_2 T}, \quad (217o)$$

$$k_T = \tilde{k}_1 + B_1 e^{\chi_1 T} + B_2 e^{\chi_2 T}, \quad (217p)$$

$$b_T = \tilde{b}_1 + \left[ (\tilde{b}_0 - \tilde{b}_1) + p_I B_1 + p_I B_2 + \Upsilon_s^1 A_1 + \Upsilon_s^2 A_2 \right] e^{r^* T} - p_I B_1 e^{\chi_1 T} - p_I B_2 e^{\chi_2 T} - \Upsilon_s^1 A_1 e^{\mu_1 T} - \Upsilon_s^2 A_2 e^{\mu_2 T}, \quad (217q)$$

avec  $p_2 = p_0$ .

Les sentiers transitoires de la richesse financière au cours des périodes 1 et 2 sont donnés par

$$a(t) = \tilde{a}_1 + [(a_0 - \tilde{a}_1) + \Upsilon_s^1 A_1 + \Upsilon_s^2 A_2] e^{r^* t} - \Upsilon_s^1 A_1 e^{\mu_1 t} - \Upsilon_s^2 A_2 e^{\mu_2 t}, \quad (218a)$$

$$a(t) = \tilde{a}_2 - \Upsilon_s^1 A_1' e^{\mu_1 t}, \quad (218b)$$

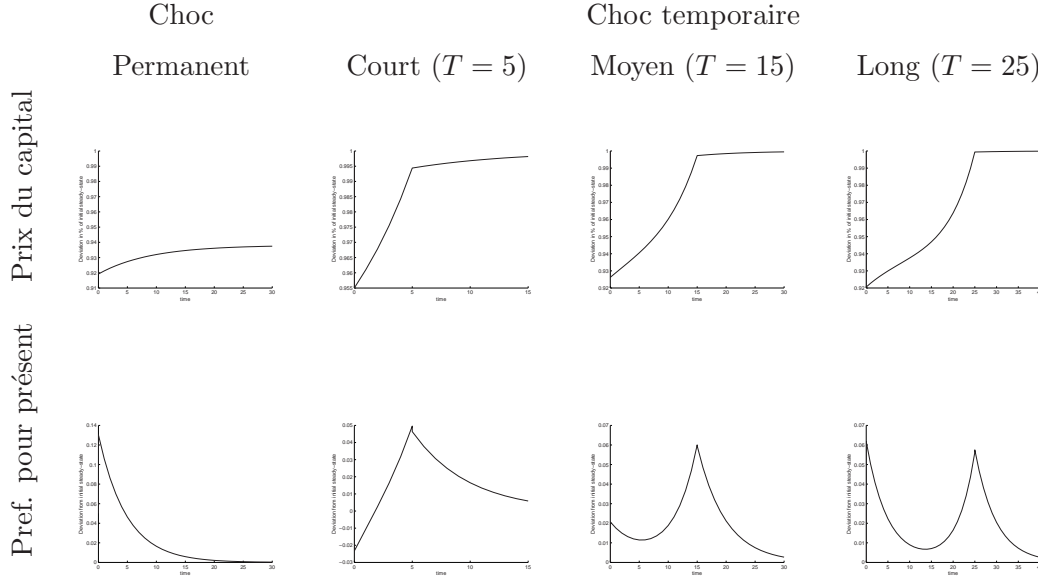


Figure 2: Effets d'une détérioration des termes de l'échange. Notes: les variations sont mesurées en écart à la valeur de long-terme

avec

$$a_0 - \tilde{a}_1 = (b_0 - \tilde{b}_1) + \tilde{q}_0 (k_0 - \tilde{k}_1) \quad (219)$$

où  $\tilde{q}_0 = p_I(p_0)$ .

### Les ratios importants à l'équilibre de long terme

Le premier ratio important est celui qui rapporte les dépenses totales de consommation à la production finale domestique exprimée en termes du bien importé :

$$\text{Ratio 1} = \frac{p_c \tilde{c}}{p \tilde{Y}} = \frac{p \tilde{x} + \tilde{z}}{p \tilde{Y}} \simeq 0.55. \quad (220)$$

Le second ratio important est celui qui rapporte les dépenses totales d'investissement (y compris les coûts d'installation) à la production finale domestique exprimée en termes du bien importé :

$$\text{Ratio 2} = \frac{p_I \tilde{J}}{p \tilde{Y}} = \frac{p \tilde{J}_x + \tilde{J}_z}{p \tilde{Y}} \simeq 0.22, \quad (221)$$

avec  $\tilde{I} = \delta_K \tilde{k}$  et

$$\tilde{J} = \tilde{I} \left[ 1 + \frac{\psi}{2} \frac{\tilde{I}}{\tilde{k}} \right] = \delta_K \tilde{k} \left[ 1 + \frac{\psi}{2} \delta_K \right].$$

### Dynamiques transitoires: $q$ et $\rho$

Pour économiser de l'espace, nous avons choisi de ne pas inclure les dynamiques transitoires du prix implicite du capital et du taux de préférence pour le présent dans le texte. Les dynamiques de ces deux variables, notées respectivement  $q$  et  $\rho$ , sont représentées sur les Figures 2 après une détérioration tant permanente que temporaire des termes de l'échange. Dans le cas d'une baisse transitoire du prix relatif des exportations  $p$ , nous considérons trois durées du choc : court ( $T = 5$ ), moyenne ( $T = 15$ ), et longue ( $T = 25$ ).



## H Estimation numérique de la variation du bien-être

Dans la section F, nous cherchons à évaluer de manière analytique les effets d'une détérioration des termes de l'échange sur le bien-être. Dans cette section, nous expliquons brièvement comment nous avons procédé pour estimer de manière numérique la variation du bien-être exprimée en pourcentage de la consommation. Nous appliquons la procédure décrite dans l'appendice de l'article de Alvarez-Cuadrado, Monteiro, et Turnovsky [2004].

À l'état-stationnaire initial, les niveaux de consommation et d'habitudes sont notés  $\tilde{c}_0$  et  $s_0$ . Le niveau du bien-être global initial avant que le choc se produise est égal à :

$$U(\tilde{c}_0, s_0) \equiv \int_0^\infty \frac{1}{1-\epsilon} \left( \frac{\tilde{c}_0}{s_0^\gamma} \right)^{1-\epsilon} e^{-\delta t} dt = \frac{1}{1-\epsilon} \left( \frac{\tilde{c}_0}{s_0^\gamma} \right)^{1-\epsilon} \int_0^\infty e^{-\delta t} dt. \quad (222)$$

En calculant (222), on obtient :

$$\frac{\left( \frac{\tilde{c}_0}{s_0^\gamma} \right)^{1-\epsilon}}{(1-\epsilon)\delta} \equiv U(\tilde{c}_0, s_0) \equiv U_0. \quad (223)$$

Evaluons maintenant le bien-être global lorsque l'économie n'est plus à l'état-stationnaire initial mais le long de la trajectoire convergant vers le nouvel équilibre de long-terme :

$$U(c(t), s(t)) \equiv \int_0^\infty \frac{1}{1-\epsilon} \left( \frac{c(t)}{s(t)^\gamma} \right)^{1-\epsilon} e^{-\delta t} dt \equiv U_t, \quad (224)$$

où les sentiers temporels de  $c$  et  $s$  sont donnés par:

$$c(t) = \tilde{c} + \omega_2^1 (s_0 - \tilde{s}) e^{\mu_1 t}, \quad s(t) = \tilde{s} + (s_0 - \tilde{s}) e^{\mu_1 t}. \quad (225)$$

Pour calculer la variation du bien-être global après un choc des termes de l'échange en pourcentage de la consommation, nous déterminons la variation de la consommation qui rend les individus indifférents entre le bien-être initial et le bien-être prévalant après la détérioration des termes de l'échange. Par conséquent, on cherche la valeur de  $\zeta$  telle que :

$$U(c(t), s(t)) = U(\zeta \tilde{c}_0, \zeta s_0). \quad (226)$$

En substituant (223), on obtient :

$$\frac{\left[ \frac{\zeta \tilde{c}_0}{(\zeta s_0)^\gamma} \right]^{1-\epsilon}}{(1-\epsilon)\delta} = \frac{\left( \frac{\tilde{c}_0}{s_0^\gamma} \right)^{1-\epsilon}}{(1-\epsilon)\delta} \zeta^{(1-\gamma)(1-\epsilon)} U_0 = U_t, \quad (227)$$

et finalement

$$\zeta - 1 = \left( \frac{U_t}{U_0} \right)^{\frac{1}{(1-\gamma)(1-\epsilon)}} - 1. \quad (228)$$

Cette expression indique la variation de la consommation qui permet d'égaliser le bien-être global initial avec le niveau de bien-être faisant suite à la détérioration des termes de l'échange. Le montant en pourcentage est donné par  $\zeta - 1$ . Puisque le terme  $\frac{1}{(1-\gamma)(1-\epsilon)}$  devient de plus en plus élevé en valeur absolue à mesure que  $\gamma$  s'approche de l'unité, une baisse du bien-être  $U_t$  par rapport au bien-être initial  $U_0$  est amplifié à mesure que les

individus prêtent davantage attention à leur consommation passée. L'explication est que comme la consommation relative est constante à long terme, c'est-à-dire  $\tilde{c} = \tilde{s}$  et donc  $\tilde{c}/\tilde{s} = 1$ , alors la consommation doit baisser davantage que dans le cas de préférences séparables dans le temps de façon à ce que l'individu soit indifférent entre  $U_t$  et  $U_0$ .

En adoptant une approche similaire à celle décrite ci-dessus, nous avons estimé de manière numérique les effets d'une détérioration des termes de l'échange sur le bien-être instantané le long de la dynamique transitoire à l'aide de la mesure suivante :

$$\zeta - 1 = \left( \frac{\phi_t}{\phi_0} \right)^{\frac{1}{(1-\gamma)(1-\epsilon)}} - 1, \quad (229)$$

où  $\phi_0$  est le niveau de bien-être instantané à l'état-stationnaire initial, c'est-à-dire  $\phi_0 \equiv \frac{\left( \frac{\tilde{c}_0}{\tilde{s}_0} \right)^{1-\epsilon}}{(1-\epsilon)}$ .

## Notes

<sup>1</sup>Cette quatrième condition implique que le stock d'actifs étrangers doit rester continu à la date  $T$ .

## References

- Becker, Gary S. and Kevin M. Murphy. (1988) A Theory of Rational Addiction. *Journal of Political Economy* 96, 675-700.
- Cardi, Olivier and Stefan F. Schubert (2010) Habit Formation vs Catching Up with the Joneses: Terms of Trade Shocks and Optimal Tax Policy. mimeo.
- Epstein, Larry G. (1987) A Simple Dynamic General Equilibrium Model. *Journal of Economic theory* 41, 68-95.
- Ryder, Harl E., and Geoffrey M. Heal (1973) Optimal Growth with Intertemporally Dependent Preferences. *Review of Economic Studies* 40, 1-31.
- Schubert, Stefan F., and Stephen J. Turnovsky (2002) The Dynamics of Temporary Policies in a Small Open Economy. *Review of International Economics* 10(4), 604-622.